Devoir Maison $n°7$
PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 22 Janvier 2024

Exercice 1

1. Montrer que $\forall y \in]-1, 1[$,
$$\ln(1+y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}$$
Indication : on partira de $\ln(1+y) = \int_0^y f(t)\, dt$ *où f est à déterminer (cf un exemple analogue en cours*
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y$ converge.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Y-a-t-il bien cohérence dans le signe obtenu ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx$.

1. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

Exercice 3

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.
4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$ sans utiliser le théorème de double limite.
   (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.*penser au théorème des fonctions monotones*
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2,\ 1 \leq \zeta(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. On considère à présent $h \in]0;\ +\infty[$.
A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.

8. On pose : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

   (a) Justifier que F est bien définie.
   (b) Monter que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.*Séparer les termes d'indices pairs des termes impairs*
   (d) Déterminer ensuite les limites de F en 1 et $+\infty$.