Devoir Maison $n°7$

PSI

MATHEMATIQUES

à rendre le 29 Janvier 2024

Première répétition

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\,.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, \mathrm{d}u\,.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ $\; 0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln\big(f(x)\big).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait

$$f(x) \leqslant e^{-ax^2}.$$

   Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n, n \geqslant 1)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

11. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

   On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1} \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n),$$

   avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} \,\mathrm{d}x \;\text{ et }\; J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \,\mathrm{d}x\,.$$

13. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x + 1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

15. En déduire que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, \mathrm{d}t \, .$$

17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

V Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. *Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.*

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \cdots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées $(U_1, \cdots, U_{n+1})$ définies par

$$\begin{aligned} U_j : \Omega &\to \{1, \cdots, n\} \\ w = (w_1, \cdots, w_{n+1}) &\mapsto w_j. \end{aligned}$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j-ième tirage. On suppose que la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j, j = 1, \cdots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$.

18. Pour une entrée `liste` $= [w_1, \cdots, w_{n+1}]$, écrire un pseudo-code ou un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \cdots, w_{n+1})$.

    Si nécessaire, on admettra l'existence d'une fonction qui permet de tester l'appartenance d'un élément w à une liste L : (w in L) renvoie « True »si $w \in L$, « False »sinon.

19. Montrer que pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.

20. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k)\mathbf{P}(X > k).$$

21. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

22. Établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k)$$

23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin du problème