PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°7$
MATHEMATIQUES
Type E3A / CCINP
à rendre Jeudi 29 Janvier

Exercice 1 : Calcul

1. Donner un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de :
   (a) $\dfrac{2t^2+\sqrt{3}}{\pi t^2+2e^2t+\sqrt{2}}$.
   (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3t^2+2t+\sqrt{5}}$.
   (c) $\dfrac{2x}{xt^2+2t+x^2}$ où x est un réel.
   (d) $\dfrac{t^3-\sqrt{1+2t^2}}{2\ln(t)-3t^2}$.

   Dans chacun des cas précédents, vous vérifierez votre résultat en faisant le quotient et montrant que la limite est 1 quand t tend vers $+\infty$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent quand t tend vers 0 de $\dfrac{\sin(\alpha t)\ln(1+t^2)}{t\tan(\sqrt{\alpha}t)}$.
3. Soit $f:[0,\pi]\mapsto\mathbb{R}$ définie par : $f(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t\in]0,\pi]$ et $f(0)=-1$.
   (a) Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$
   (b) Calculer $f'(t)$ pour $t\in]0,\pi]$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t\to 0} f'(t)$. On note l cette limite. *Remarque : Par le théorème du prolongement de la dérivée (appelé aussi théorème limite de la dérivée, on en conclut que f est C^1 sur $[0,\pi]$ et $f'(0)=l$*

Exercice 2 : Séries de Fonctions

Pour tout réel $x>1$ et tout entier $n\geqslant 0$, on pose :

$$u(x)=\frac{1}{\ln(x)},\, f_n(x)=(-1)^n\,u(x+n)$$

(a) Montrer la convergence simple sur $]1,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum f_n(x)$.
on note désormais f sa fonction somme.
(b) La convergence de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ est-elle uniforme sur $]1,+\infty[$, sur $[a,+\infty[$ pour $a>1$?.
(c) La convergence de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ est-elle normale sur $]1,+\infty[$, sur $[a,+\infty[$ pour $a>1$?.
(d) Trouver une relation simple entre $f(x), f(x+1), u(x)$.
(e) f est-elle continue sur son intervalle de définition ?
(f) Montrer que f admet , pour x tendant vers $+\infty$ une certaine limite à préciser.
(g) i. Montrer que : $\forall x>1, f(x)\geqslant u(x)-u(x+1)$.
   ii. En déduire $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$.
(h) i. Etablir que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{\ln(x+2n)}-\frac{1}{\ln(x+2n+1)}\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{\ln(1+\frac{1}{x+2n})}{\ln(x+2n)\ln(x+2n+1)}\right]$$

   ii. En déduire que f est décroissante.
(i) i. Justifier que :

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x)}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(x+n+1)}$$

   ii. En sommant deux expressions de $f(x)$, trouver

$$2f(x)=\frac{1}{\ln(x)}+\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\ln(x+n)}-\frac{1}{\ln(x+n+1)}\right)$$

iii. En déduire

$$\forall x > 1, \frac{1}{\ln(x)} \leqslant 2f(x) \leqslant \frac{1}{\ln(x)} + \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$$

iv. Trouver $D > 0$ tel que $f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{D}{\ln(x)}$.

(j) Donner l'allure de la représentation graphique de f avec sa(ou ses) branche(s) infinie(s).

Exercice 3 : Probabilités

Vous utiliserez les mêmes méthodes que l'exercice 10 de la feuille de TD sur les probas Trois enfants A, B, C jouent à la balle :

— A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

— B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

— C envoie toujours la balle à B.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités que A, B ou C ait la balle à la n ième étape.

(a) Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.

(b) Trouver une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

(c) Déterminer la limite de (a_n, b_n, c_n) quand $n \to +\infty$ et montrer que cette limite est indépendante des conditions initiales.