PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°7$

MATHEMATIQUES
Type Mines/Centrale
à rendre Jeudi 29 Janvier

Exercice 1 : Calcul

En utilisant le théorème appelé théorème de prolongement de la dérivée ou théorème limite de la dérivée, montrer que la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ si } t \in]0,\pi] \text{ et } f(0) = -1$$

est C^1 sur $[0,\pi]$.

Exercice 2 : Séries de Fonctions

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et pour tout réel x et $\alpha \in]0,+\infty[$, $S_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$. Dans la suite u représente un réel de $]-1,1[$.

1. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier, en fonction du paramètre γ, l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $J : t \mapsto \dfrac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}$.

   Soit $t \geqslant 0$. O, pose $R_N(t,u) = \left(\dfrac{u}{e^t - u} - ue^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}(ue^{-t})^n\right)t^{\alpha-1}$.
3. Simplifier l'expression de R_N en l'écrivant sous forme d'une fraction.
4. Prouver que, pour tout $u \in]-1,1[$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} R_N(t,u) = 0$.
5. Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $\alpha > 0$, pour tout $u \in]-1,1[$:

$$\int_0^\infty \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u}\,\mathrm{d}t = K(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n^\alpha}$$

6. En admettant que l'identité précédente reste vraie pour $u = e^{ix}$, où $x \in]0,2\pi[$, en déduire que, pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $S_\alpha(x) = \dfrac{\sin(x)}{2\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}t - \cos x}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 : Probabilités

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note F_n : avoir face au n ième lancer.

1. Que traduit l'évènement $B_n = F_n \cap F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}$? puis l'évènement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$?
2. Pourquoi ne peut-on pas écrire $P(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.
3. On pose $A_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
   (a) Montrer que $A_n \cap B_{n+1} = A_{n-2} \cap B_{n+1}$.
   (b) Montrer que $P(A_{n+1}) - P(A_n) = \frac{1}{8}(1 - P(A_{n-2}))$. En déduire que $(P(A_n))_n$ converge vers 1.
   (c) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.
   (d) Montrer que $P(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
4. Quelle est la probabilité d'apparition de la séquence (pile, pile, face) ?

Exercice 4 : Probabilités

On lance n pièces de monnaie. La probabilité que la k-ième pièce amène Pile vaut $\frac{1}{2k+1}$.
On pose les événements suivants :

— P_i : « Le lancer i amène Pile »
— S_i : « on a obtenu un nombre pair de Piles sur les i premiers lancers »
— $u_i = \mathbb{K}(S_i)$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que $\forall i \geqslant 1, u_{i+1} = \frac{2i+2}{2i+3} u_i + \frac{1}{2i+3}(1 - u_i)$.
3. Que peut-on dire de la suite $((2i + 3)u_i)_{i \geqslant 1}$?
4. Après les n lancers de pièces, quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de Piles ?