classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°8$

MATHEMATIQUES
Type E3A
à rendre Jeudi 12 Février

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2+x+1)y(x) = 0 \tag{E}$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.
2. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

   On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   (a) Montrer que l'on a : $\begin{cases} \forall n \geqslant 2, \quad (n^2-1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

   (b) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$.

   (c) Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

   Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

   (d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

EXERCICE 3

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on ait :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$
2. Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha.$$
3. **Espérance et variance de** X
   (a) Après avoir justifié l'existence, déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*
   (b) Déterminer $\mathrm{E}(X(X+1))$.
   (c) En déduire la variance $\mathrm{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

EXERCICE 4

Questions de cours

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Rappeler la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

*****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que :
— $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
— il existe $p \in]0,1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.
2. **Étude de la variable aléatoire** $X + Y$
   (a) Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.
   (c) Soient n et k deux entiers naturels.
      i. Lorsque $k > n$, calculer $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k)$.
      ii. On prend $k \leqslant n$. Démontrer qu'il existe un scalaire r_n tel que : $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = r_n$.
3. On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$ où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.
   (a) Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?
   (b) Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbb{P}(M \geqslant k)$.
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire M.
   (d) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $(M = k) \cap (V = r)$.
   On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.
   (e) En déduire la loi de V.
   (f) Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.