

Devoir Maison n°8
Extrait CCINP PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 11 Février 2024

Problème
Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note \mathcal{D}_α l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α .

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$. **Partie. I Quelques propriétés des fonctions f_α**

- Q1.** Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α .
- Q2.** Déterminer, suivant les valeurs du réel α , le domaine de définition \mathcal{D}_α de la fonction f_α . On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.
- Q3.** On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.
- Q4.** Expliciter f_0 , f_{-1} et f_1 .
- Q5.** Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur \mathcal{D}_α .
- Q6.** Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. On pourra comparer f_α à f_1 .

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α , définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N}^* , tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

- Q7.** Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.
- Q8.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance. Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II. Un logarithme complexe

- Q9.** Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

- Q10.** Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S . Pour tout x réel élément de $] -R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

- Q11.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g .
- Q12.** Prouver que g est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.
- Q13.** On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q14. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

III. Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$ Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0, 1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$.

Q15. Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q16. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1 - \alpha)$.

Q17. Prouver que, pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

Q18. En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt.$$

Q19. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.