Devoir Maison $n°9$
Sujet E3A/CCINP PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 23 Février 2024

Voici un exercice d'un sujet d'E3A et une partie de problème d'un sujet CCINP. Pour vendredi, traitez en priorité l'exercice et la première partie du problème

Exercice

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Q1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.

Q2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?
(1) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

Q3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes :

— X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
— pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

3.1. Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.

3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in N$**

3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
Que peut-on en conclure ?

Problème - Une équation de Bessel

On se propose dans ce problème d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

Q1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Partie 1- Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_kx^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

Q2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}. \end{cases}$$

Q3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_kx^k$.

Q4. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Partie 2-Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

Q5. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} & \beta_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{cases} \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q6. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k| \leq \dfrac{M}{r^k}$.

Q7. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q8. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$?

Partie 3-Ensemble des solutions de (4)

Q9. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y \colon x \longmapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \colon \ \longmapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q10. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q11. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q12. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.