

Devoir Surveillé n°1
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 17 Septembre 2022
Durée : 2 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I : Des Calculs

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer le Développement limité à l'ordre 2 de $e^{2\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n})}$.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(3t) dt$.
3. Calculer le déterminant de la matrice $(\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq 4}$.

Exercice II

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à n .
- Dans cet exercice, un polynôme est confondu avec sa fonction polynômiale associée.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout polynôme P , on admet que $\int_y^x P(t)e^t dt$ a une limite finie quand y tend vers $-\infty$. On note cette limite par $\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.
Ainsi par exemple, pour $P = 1$, on a $\int_y^x P(t)e^t dt = \int_y^x e^t dt = e^x - e^y$, donc $\int_{-\infty}^x e^t dt = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^x - e^y = e^x$.
- On définit l'application φ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = Q$ où $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t)e^t dt$.
- Id désigne l'application identité sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 1. Montrer que $\int_{-\infty}^x t e^t dt = e^x(x-1)$ et $\int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = e^x(x^2 - 2x + 2)$.
 2. Démontrer que, pour tout $i \in [0..n]$, $\int_{-\infty}^x t^i e^t dt = e^x(x^i + R(x))$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(i-1)$.
 3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 4. Dans cette question uniquement, on prend $n = 2$.

(a) Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer une base de $\ker(\varphi - Id)$.

(c) Calculer $(A - I)^2, (A - I)^3$.

(d) On pose $f = \varphi - Id$ et on rappelle que $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. Justifier que $f^3 = 0$.

(e) En déduire $\text{Im}(f^2) \subset \ker f$.

(f) Justifier qu'il existe $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f^2(P_0) \neq 0$.

- (g) Montrer que $P_0 \neq 0$ et que $(P_0, f(P_0), f^2(P_0))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la matrice de f dans cette base? Quelle est la matrice B de φ dans cette base?
- (h) Montrer que $\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / BM = MB\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base et la dimension.

5. On revient à n quelconque. Calculer $\det(\varphi)$. Qu'en déduit-on?

Exercice III

Notations :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On désigne par $T_{s,n}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n .
- On désigne par \mathcal{S}_n l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n , c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A$ où A^T désigne la matrice transposée de A .
- On désigne par \mathcal{A}_n l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n , c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = -A$.
- On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : T_{s,n} &\longrightarrow \mathcal{A}_n \\ A &\longmapsto A - A^T \end{aligned}$$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $T_{s,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont on donnera une base et la dimension.
3. **Sans utiliser les dimensions de \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n** , montrer que \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. (a) Vérifier qu'on a bien $\forall A \in T_{s,n}, \varphi(A) \in \mathcal{A}_n$
 (b) Montrer que φ est une application linéaire surjective (**sans avoir à calculer la dimension de \mathcal{A}_n**).
5. En déduire la dimension de \mathcal{A}_n et celle de \mathcal{S}_n .