Devoir Surveillé $n°1$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 16 Septembre 2023
Durée : 2 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

PROBLÈME 1

On considère un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et un endomorphisme f de E ayant pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{U}$.
On désigne par I_3 la matrice identité.
Tout vecteur u de E a des coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{U}$. On notera indifféremment $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$ ou $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1. (a) Soit un vecteur u de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $\mathcal{U}$. Donner $f(u)$ dans la base $\mathcal{U}$.
   (b) Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   (c) Déterminer pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda I_3 - A)$. Montrer qu'il s'agit d'un polynôme de variable λ dont on donnera le degré et ses coefficients.
   (d) Montrer que ses racines sont -1, 0 et 2 que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 de A. On choisira $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (e) Montrer que , pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\ker(A - \lambda_i I_3) = \mathrm{Vect}(v_i)$ où v_i est tel que sa première composante soit égale à 1.
   (f) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.
2. (a) Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
   (b) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

   où les a_n sont les termes consécutifs d'une même suite.
   Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Donner a_0, a_1, a_2 et a_3. *On rappelle que* $A^0 = I_3$
5. (a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Soit F un espace vectoriel de dim 2 et $\mathcal{V}$ une base de F. On note g l'endomorphisme de F tel que sa matrice dans F soit B. Déterminer un vecteur X_1 non nul de F tel que $g(X_1) = -X_1$ et un vecteur X_2 non nul de F tel que $g(X_2) = 2X_2$.

(c) En déduire qu'il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B = Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

(d) Calculer l'inverse Q^{-1} de Q.

(e) Pour tout entier strictement positif n, calculer B^n en fonction de n.

6. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

(b) Donner une expression de a_n pour tout entier naturel n non nul.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
— $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
— $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
— Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1; n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ, c'est à dire :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta_n(P) = \Delta(P)$$

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q6. Montrer que $\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que $\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On définit alors le nouvel endomrphisme noté φ_n, par : $\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P) = \varphi(P)$.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau et l'image de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0; n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau et l'image de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0; n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.