Devoir Surveillé $n°1$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 16 Septembre 2023
Durée : 2 heures
Sujet 2
(Documents, calculatrice et portables interdits)

PROBLÈME 1

Notations et définitions

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
— $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
— $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
— Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1; n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ, c'est à dire :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta_n(P) = \Delta(P)$$

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q6. Montrer que $\ \forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que $\ \forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On définit alors le nouvel endomrphisme noté φ_n, par : $\ \forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P) = \varphi(P)$.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

Q10. Expliciter le noyau et l'image de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0;n]\!]$.

Q11. Expliciter le noyau et l'image de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0;n]\!]$.

Q12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

PROBLÈME 2

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet on considère des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $v(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on notera que $u^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant v(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$: on prendra garde qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}$ est dit nilpotent lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :
Théorème A.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim(\mathcal{V}) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème A est considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

Théorème B.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

On rappelle que :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'un endomorphisme u de E lorsqu'il existe un vecteur non nul de x de E tel que $u(x) = \lambda x$. λ est aussi appelé valeur propre de toute matrice représentant u.
- Toute matrice à coefficients complexes M est semblable à une matrice triangulaire T et les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de M.

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carrée M représentant l'endomorphisme u.

1. Démontrer que M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure, établir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, et en déduire que $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ un élément nilpotent de nilindice n.
On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [[2, n]]$, et $u(e_1) = 0$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geqslant q \geqslant 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.
4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p. Déduire de la question précédente que $p \leqslant n$ et que si $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$. Lorsque a désigne un vecteur de E, on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ en fonction de celle de E. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera désormais $a \otimes x$ l'application de E dans lui même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) \,:\, \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.
7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a|x)$.