PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°1$

PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 13 Septembre 2025
Durée : 1h 20 mn
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Sujet Niveau E3A/CCINP

Exercice I

Notations :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On désigne par $T_{s,n}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A$ où A^T désigne la matrice transposée de A.
- On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = -A$.
- On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} T_{s,n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ A & \longmapsto & A - A^T \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $T_{s,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont on donnera une base et la dimension.
3. **Sans utiliser les dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$**, montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. (a) Vérifier qu'on a bien $\forall A \in T_{s,n}, \varphi(A) \in \mathcal{A}_n$
   (b) Montrer que φ est une application linéaire surjective (**sans avoir à calculer la dimension de $\mathcal{A}_n$).**
5. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_n$ et celle de $\mathcal{S}_n$.

Exercice II

Soit ϕ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\phi(P)$ défini par :

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

I Etude de ϕ

1 Montrer que si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(P)$ est un polynôme de degré n.

2 Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3 Déduire de 1. que $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \mathbb{R}_0[X]$.

4 Le polynôme 1 a-t-il un antécédent par ϕ ?

5 A-t-on $\mathrm{Im}\,(\phi) = \mathbb{R}[X]$?

II Représentation matricielle de ϕ. On appelle ψ la restriction de ϕ à $E = \mathbb{R}_3[X]$, c'est-à-dire l'application ψ définie par :

$$\forall P \in E, \psi(P) = \phi(P)$$

6 Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

7 Déterminer la matrice A de ψ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

8 Déterminer les racines λ du polynôme $\chi(\lambda) = \det(\lambda.Id_E - \psi)$.

9 Déterminer pour chacune de ces valeurs une base de $\mathrm{Ker}\,(\psi - \lambda.Id_E)$.

10 En déduire l'existence d'une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice représentative de ψ s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

11 Explicitez la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$

12 À l'aide des questions précédentes, écrire , pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de D^n.

Exercice I

Notations :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On désigne par $T_{s,n}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A$ où A^T désigne la matrice transposée de A.
- On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = -A$.
- On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} T_{s,n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ A & \longmapsto & A - A^T \end{array}$$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $T_{s,n}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont on donnera une base et la dimension.
3. **Sans utiliser les dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$**, montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. (a) Vérifier qu'on a bien $\forall A \in T_{s,n}, \varphi(A) \in \mathcal{A}_n$

   (b) Montrer que φ est une application linéaire surjective (**sans avoir à calculer la dimension de $\mathcal{A}_n$).**
5. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_n$ et celle de $\mathcal{S}_n$.

Exercice II

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\operatorname{Ker} M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\operatorname{rg}(M)$ son rang. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f.

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{rg}(M)$;

— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$;

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

I Résultats préliminaires

On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

1. *Question de cours.* Démontrer que
$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$
2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)Q.$$

II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.
2. Démontrer que, si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang.
3. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

   est linéaire et injective.

II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall \left(\Theta, \Theta'\right) \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

   Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.
3. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.