Devoir Surveillé $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
Algèbre
Samedi 9 Octobre 2021
(Durée : 2 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

Vous avez le choix entre le sujet n°1 de niveau e3A/CCP et le sujet n°2 où le second problème est un extraît d'un sujet de Centrale.
Le candidat attachera la plus grande importance à l'orthographe, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

SUJET $n°1$

Exercice I

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer A_0 et $A_{\frac{\pi}{2}}$.
2. Montrer que $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que A_θ est inversible et déterminer φ tel que $A_\theta^{-1} = A_\varphi$.
4. Montrer que : $\forall (\theta, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, , (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède, une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application f définie sur E par $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a & -c \\ b & 3d \end{pmatrix}$.

   On note $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Montrer que f est un endomorphisme de E et que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Etablir que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donner la matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$.

8. Déduire de la question précédente $det(f)$ et une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = A'$. On pose $\mathcal{B}' = (E_1', E_2', E_3', E_4')$.
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^p = A'$. On note g l'endomorphisme associé à M dans la base $\mathcal{B}'$.
   (a) En notant $g^p = \overbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}^{p \text{ fois}}$, justifier que $g^p = f$.
   (b) Déterminer, en utilisant de A', $\operatorname{Ker}(f - 2Id_E), \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$.
   (c) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - 2Id_E), \operatorname{Ker}(f - 3Id_E)$ sont stables par g.
   (d) Donner alors une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^p = A'$.
10. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DM = MD$?
   (b) Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $NM = MN$?
   (c) Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DM = MN$?
   (d) Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MD = NM$?
   (e) Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A'M = MA'$? *on écrira M sous forme de matrices par blocs*
   (f) Montrer que $C' = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / A'M = MA'\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et sa dimension.
   (g) On pose $C = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / AM = MA\}$
      i. Vérifier que C est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
      ii. P étant la matrice définie en Question 7, Vérifier que $M \in C' \Longleftrightarrow PMP^{-1} \in C$.
      iii. Montrer que $\varphi : M \in C' \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme et déterminer φ^{-1}.
      iv. Déterminer une base et la dimension de C.

Exercice II

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel, $n \geq 1$.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.
$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
$\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égal à n.
Pour tout k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, on considère le polynôme P_k défini par :

$$P_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

1. Pour k et i éléments de $\{0, 1, \ldots, n\}$, calculer $P_k(x_i)$.
2. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3.

a. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Démontrer que $Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

b. Pour m élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose : $s_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$. En utilisant la question précédente avec un certain polynôme, calculer s_m.

c. Donner la matrice de passage de la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son déterminant.

4. Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P_k$.

a. Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles. Comment se factorise Q_1 ?

b. On pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} x_{n+2}^{m} P_k(0)$.

i. Déduire, en utilisant la question 4.a avec un polynôme Q correctement choisi, que $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$.

ii. Calculer s_{n+2}. Exprimer le résultat en fonction de n, de $\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\prod_{k=0}^{n} x_k$.

SUJET $n°2$

Exercice I

Soit V un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de V.On note $f^0 = Id_V$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{\text{k fois}}$.

1. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k, k \in \mathbb{N}$ est une suite de sous espaces vectoriels de V emboîtée croissante, c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$$

2. Montrer que si il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux, alors pour tout $q \geq p$, $\operatorname{Ker} f^q = \operatorname{Ker} f^{q+1}$, puis que $\forall k \geq p, \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.
   Désormais, on considère p le plus petit entier possible tel que $Ker\, f^p = Ker\, f^{p+1}$.
3. En déduire que si V est de dimension finie de dimension n, la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal $n = \dim V$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1}$.
5. Si V est de dimension n, montrer que $\operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p = V$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \dim \operatorname{Ker} f^k$ et on considère un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f^k$ dans $\operatorname{Ker} f^{k+1}$(on a donc $S_k \oplus \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$) puis l'application linéaire $\tilde{f}$ de S_k dans V, définie par : $\forall x \in S_k, \tilde{f}(x) = f(x)$.
   (a) Montrer que $\tilde{f}$ est injective.
   (b) Montrer que $rg(\tilde{f}) = a_{k+1} - a_k$.
   (c) Montrer que $\operatorname{Im} \tilde{f} \oplus \operatorname{Ker} f^{k-1} \subset \operatorname{Ker} f^k$.
   (d) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{k+1} - a_k \leq a_k - a_{k-1}$.
7. Application aux endomorphismes nilpotents : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vecoriel de dimension finie n tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1, pour lequel $u^q = 0$. Démontrer que $u^n = 0$.

Exercice II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note U_n l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (termes sous diagonaux nuls) . L_n désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux valent 1.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le terme de A situé sur la ligne i etla colonne j est noté a_{ij}.

Pour tout $k \in [\![1..n]\!]$, on définit la matrice $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$.

1. (a) Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose, pour tout $k \in [\![1..n]\!]$, $V_k = \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
      i. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall k \in [\![1..n]\!]$, $AV_k = V_k$.
      ii. En déduire que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inversible, son inverse A^{-1} l'est aussi.

(b) Montrer que :

   i. $I_n \in L_n$

   ii. $L_n \subset GL_n(\mathbb{R})$.

   iii. le produit de deux matrices de L_n reste dans L_n.

   iv. l'inverse d'une matrice de L_n reste dans L_n.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si A est inversible, il existe au plus un couple $(L, U) \in L_n \times U_n$ tel que $A = LU$.*Si c'est le cas, on dira que A possède une décomposition LU (L comme Lower et U comme Upper)*

   (b) Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$. *Ecrire L et U comme matrice triangulaire par blocs en utilisant respectivement L_k et U_k.*

   (c) On suppose que $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit A par blocs sous la forme : $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   Trouver une matrice $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix} \in L_n$ telle que : $\forall j \in \{1, \cdots, n-1\}, (HA)_{n,j} = 0$.

   On choisira H_{n-1} le plus simple possible et on explicitera H' , ainsi que les blocs de H^{-1} en fonction des blocs de la matrice A.

   (d) Montrer que, si pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}, \det(A_k) \neq 0$ alors A a une décomposition LU (*on pourra opérer par récurrence en utlisant une décomposition par blocs de A*)