Devoir Surveillé $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 7 Octobre 2023
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I

1. Montrer que : $\forall\theta\in\mathbb{R},\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$ et $\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$.
2. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Déduire de la question précédente le calcul de

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) \end{vmatrix}$$

3. A quelles conditions la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice II

1. Soit $(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts.
   (a) Pour $j\in[\![0,n]\!]$, donner la définition du j ème polynôme de Lagrange associé à $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$.
   (b) Montrer que $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Montrer que : $\forall P\in\mathbb{R}_n[X], P=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$.
2. Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(-1)=3, P(1)=2, P(2)=-1, P(4)=1$$

3. Soit P de degré n tel que pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, $P(k)=\dfrac{1}{k}$.
   (a) Comment s'écrit P en fonction des polynômes de Lagrange $(L_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ associés à $(1,2\cdots,n+1)$?
   (b) Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$. Montrer que $L_k(n+2)=\dfrac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{(n+2-k)!(k-1)!}$.
   (c) En déduire que $P(n+2)=\dfrac{1+(-1)^n}{n+2}$.

Exercice III

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n.
On note $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tous i et j appartenant à $\{1,2,..,n\}$, on pose $\delta_i^j=0$ si $i\neq j$ et $\delta_i^j=1$ si $i=j$.
Soit $(E_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,..,n\}^2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On peut écrire $E_{ij}=\left(\delta_i^k\delta_j^l\right)_{(k,l)\in\{1,2,..,n\}^2}$.
On note Tr l'application trace.

Partie I

1. Montrer que $Tr\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$
2. Montrer que, pour tout $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $Tr(AB)=Tr(BA)$.
3. Montrer que, si A et B sont semblables, alors $Tr(A)=Tr(B)$.

4. (a) Soit $A=(a_{kl})_{(k,l)\in\{1,2,..,n\}^2}$ et $(i,j)\in\{1,2,..,n\}^2$. Calculer les coefficients de la matrice AE_{ij}.
   (b) En déduire que : Pour tous $(i,j,p,q)\in\{1,2,..,n\}^4$, montrer que $E_{ij}E_{pq}=0$ si $j\neq p$ et $E_{ij}E_{jq}=E_{iq}$.
   (c) On se donne $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AM)=Tr(BM)$.
      i. Justifier que $\forall(i,j)\in\{1,2,..,n\}^2, Tr(AE_{ij})=Tr(BE_{ij})$
      ii. En déduire que A=B.

Partie II

Soit $F=\{f\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})/\forall(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB)=f(BA)\}$

1. Justifier que $Tr\in F$.
2. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$.
3. Soit $f\in F$. En utilisant I.4 b), Montrer que :
   (a) $\forall(i,j)\in\{1,2,..,n\}^2, i\neq j \Longleftarrow f(E_{ij})=0$. (*On écrira E_{ij} comme un produit de matrices A et B correctement choisies*).
   (b) $\forall i\in\{1,2,..,n\},\forall j\in\{1,2,..,n\}, f(E_{ii})=f(E_{jj})$.
4. En déduire que $F=\text{Vect}(Tr)$.*on décomposera une matrice M comme combinaison linéaire des matrices* $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
5. Exprimer à l'aide d'une phrase en français ce que l'on vient de démontrer.

Exercice IV

On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant1}$ définie par : $H_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

1. Justifier : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{1}{t}dt\leqslant\frac{1}{p}$ et $\forall p\geqslant2, \displaystyle\frac{1}{p}\leqslant\int_{p-1}^{p}\frac{1}{t}dt$
2. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant1$: $\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant1+\ln(n)$.
3. Montrer que la suite $(H_n-\ln(n))_{n\geqslant1}$ converge .
   on pourra étudier sa monotonie en utilisant l'inégalité $\forall x>-1, \ln(1+x)\leqslant x$.
   On notera γ sa limite.
4. Justifier que $0\leqslant\gamma\leqslant1$.
5. Pour tout entier $n\geqslant1$, on pose : $\gamma_n=H_n-\ln(n)$.
   (a) Déterminer un équivalent de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$ quand $n\to+\infty$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant1}(\gamma_{n+1}-\gamma_n)$.
   (c) En déduire à nouveau la convergence de la suite $(H_n-\ln(n))_{n\geqslant1}$.
6. Montrer que : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n}{n-1}\right)=\gamma-1$.
7. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant1$, $\gamma_n-\gamma=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\dfrac{k}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)$.
   Soit $\varepsilon>0$.
8. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, pour tout entier $k\geqslant n_0$:
$$\left|\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{k^2}$$
9. Montrer que,pour tout entier $n\geqslant n_0$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$
10. (a) Soit n fixé. Calculer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k(k-1)}$. (*Mettre* $\dfrac{1}{2k(k-1)}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k-1}$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{R}$).
    (b) Déduire de ce qui précède le développement asymptotique suivant :
$$H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\,(1)$$