Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Algèbre
Samedi 11 Décembre 2021
(Durée : 2 heures)

$\boxed{\text{Documents, calculatrice et portables interdits}}$

Quelques questions de cours

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et A sa matrice dans une base de E

1. Compléter la phrase : λ est une valeur propre de u si et seulement si $A - \lambda I_n$ ....
2. Compléter la phrase : 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas ....
3. Compléter la phrase en utilisant le mot « valeur propre » : A est inversible si et seulement si 0 .....
4. Compléter la phrase en utilisant le mot « valeur propre » : $\det(u - \lambda Id_E) \neq 0$ si et seulement si λ ...... de u.
5. Donner la définition en utilisant des accolades du sous espace propre associé à λ.
6. Compléter la phrase : λ est une valeur propre de u si et seulement si son sous espace propre........
7. Que signifie que « χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ » ? Avec une telle hypothèse que peut-on dire de $\mathrm{tr}\,(u)$ et $\det(u)$?
8. Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre de A.
9. Donner l'encadrement reliant la dimension du sous espace propre et l'ordre de multiplicité d'une valeur propre de A.

Exercice I

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A

1. Donner les éléments propres de f. On montrera que son spectre a deux éléments que l'on notera α et β, où $\alpha < \beta$. Puis, montrer que la dimension de $E_\alpha(f)$ est 2. On note alors (X_1, X_2) une base de $E_\alpha(f)$. Enfin, montrer que la dimension de $E_\beta(f)$ est 1. On note alors $E_\beta(f) = \mathrm{Vect}\,(X_3)$ où $X_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On précisera bien entendu les valeurs de α, β et on donnera des vecteurs X_1, X_2, X_3 possibles.
2. Donner la forme (sous forme de combinaison linéaire) de tous les vecteurs propres associés à α, puis ceux associés à β.
3. Vérifier que (X_1, X_2, X_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. (a) Soit $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $D = \mathrm{Vect}\,(u)$. Montrer que D est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.
   (b) Déterminer les droites vectorielles stables par f.
6. (a) Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$.
   Etablir que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est stable par f si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi \circ f)$
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
   (c) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0\}$.
   Montrer que H est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.
   (d) En déduire les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice II

On considère la matrice, dite matrice tridiagonale, suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - $x_0 = x_{n+1} = 0$
   - $\exists k \in \{1..n\}, x_k \neq 0$
   - $\forall k \geq 1, x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$

   Procéder par double implication.
2. On considère l'équation sur $\mathbb{C}$: $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = 0$
   (a) Justifier qu'elle admet deux racines complexes . On les note u et v .
   (b) Justifier les relations : $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = (r-u)(r-v)$ et $u + v = \lambda - 2, uv = 1$.
3. Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $(x_k)_k$ la suite associée définie en 1.
   On suppose que les racines u et v trouvées auparavant sont distinctes.
   (a) Justifier qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2/\{(0,0)\}$, $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha u^k + \beta v^k$.
   (b) Etablir que $\beta = -\alpha$, $u^{2(n+1)} = 1$ et $v = \overline{u}$.
   (c) Justifier que $u \notin \{1, -1\}$.
   (d) Montrer qu'on peut choisir $u = e^{\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$ et $v = e^{-\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$.
   (e) En déduire que les valeurs propres associées aux couples (u, v) trouvées précédemment sont $\lambda_p = 4\cos^2\left(\frac{\pi p}{2(n+1)}\right)$ pour $p \in [\![1, n]\!]\}$.
   (f) Pour quelle raison n'a-t-on pas besoin de traîter le cas $u = v$ pour étudier les éléments propres de A ? *Penser au nombre maximal de valeurs propres et le comparer au nombre déjà obtenu.*
   (g) En déduire que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{4\cos^2\left(\frac{\pi p}{2(n+1)}\right)/p \in [\![1, n]\!]\}$ et
   $\forall p \in [\![1, n]\!], E_{\lambda_p}(A) = \text{Vect}\,(X_p)$ où $\lambda_p = 4\cos^2\left(\frac{\pi p}{n+1}\right)$ et $X_p = (\sin\frac{p\pi}{2(n+1)}, \sin\frac{2p\pi}{2(n+1)}, \cdots, \sin\frac{np\pi}{2(n+1)})$.
4. Donner le polynôme caractéristique de A.
5. Calculer $4\sum_{p=1}^{n} \cos^2\left(\frac{p\pi}{2n+2}\right)$.
6. Déduire de ce qui précède que A est inversible.