classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 11 Janvier 2025
Durée : 2 heures
Niveau E3A/CCINP
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Problème 1 :Autour de la fonction zêta alternée de Riemann

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

   Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.
3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
5. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

Problème II

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel ≥ 2. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement complexes), I_n la matrice unité et O_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).
Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), on note $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}\,(A)$ la trace de A, égale à la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

I Réduction des matrices réelles d'ordre 2

Soit A une matrice carrée réelle de taille 2 : $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

I.A - *Généralités*

I.A.1) Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

I.A.2) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } A = \lambda_0.I_2$$

I.A.3) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \lambda_0.I_2$$

I.B - *Applications*

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{cases}$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_n \end{pmatrix}$.

I.B.1) Trouver une matrice A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k : $X_{k+1} = AX_k$.

I.B.2) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer X_k en fonction de A, X_0 et k.

I.B.3) Prouver que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

I.B.4) Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de A^k en fonction de k.

I.B.5) En déduire l'expression de u_k et v_k en fonction de k.

II Réduction de matrices d'ordre 3

On définit la matrice J par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.1) Calculer J^2 et J^3.

Soit k dans $\mathbb{N}$. Préciser J^k en fonction de k.

II.2) On note j le nombre complexe égal à $\mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

Rappeler la valeur de $1 + j + j^2$.

II.3) Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.

II.4) Déterminer une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix} P^{-1}$$

II.5) Soient trois nombres complexes a, b et c. On pose

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Exprimer $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.

b) En déduire que $A(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a, b et c.

c) Préciser les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c)$.

d) Exprimer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et du nombre complexe j sous la forme d'un produit.

II.6) On pose $E = \{A(a,b,c); (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Donner la dimension de E en justifiant avec soin.