Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Algèbre
Samedi 8 Janvier 2022
(Durée : 2 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

Quelques questions de cours

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et A sa matrice dans une base de E

1. Compléter la phrase en utilisant le mot « valeur propre » : $\det(u - \lambda Id_E) \neq 0$ si et seulement si λ ...... de u.
2. Donner la définition en utilisant des accolades du sous espace propre associé à λ.
3. Compléter la phrase : λ est une valeur propre de u si et seulement si son sous espace propre n'est pas....
4. Donner la définition rigoureuse de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre de A.
5. Donner l'encadrement reliant la dimension du sous espace propre et l'ordre de multiplicité d'une valeur propre de A.
6. Donner un polynôme annulateur d'un projecteur $f \in \mathscr{L}(E)$.
7. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des racines sur $\mathbb{K}$ d'un polynôme annulateur P de u.
   – Décrire $\mathscr{R}$ en utilisant des accolades.
   – Quelle relation y-a-t-il entre le spectre de u et $\mathscr{R}$.
8. Énoncer le théorème de Cayley Hamilton.

Exercice I

On considère la matrice, dite matrice tridiagonale, suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :
   – $x_0 = x_{n+1} = 0$
   – $\exists k \in \{1..n\}, x_k \neq 0$
   – $\forall k \geq 1, x_{k-1} + (2-\lambda)x_k + x_{k+1} = 0$
   Procéder par double implication.
2. On considère l'équation sur $\mathbb{C}$: $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = 0$
   (a) Justifier qu'elle admet deux racines complexes . On les note u et v .
   (b) Justifier les relations : $r^2 + (2-\lambda)r + 1 = (r-u)(r-v)$ et $u + v = \lambda - 2, uv = 1$.
3. Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $(x_k)_k$ la suite associée définie en 1.
   On suppose que les racines u et v trouvées auparavant sont distinctes.
   (a) Justifier qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2/\{(0,0)\}, \forall k \in \mathbb{N}, x_k = \alpha u^k + \beta v^k$.
   (b) Etablir que $\beta = -\alpha$, $u^{2(n+1)} = 1$ et $v = \overline{u}$.
   (c) Justifier que $u \notin \{1, -1\}$.
   (d) Montrer qu'on peut choisir $u = e^{\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$ et $v = e^{-\frac{p\,i\pi}{n+1}}$ pour $p \in \{1..n\}$.

(e) En déduire que les valeurs propres associées aux couples (u,v) trouvées précédemment sont $\lambda_p = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi p}{2(n+1)}\right)$ pour $p \in [\![1,n]\!]\}$.

(f) Pour quelle raison n'a-t-on pas besoin de traîter le cas $u = v$ pour étudier les éléments propres de A ? *Penser au nombre maximal de valeurs propres et le comparer au nombre déjà obtenu.*

(g) En déduire que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{4\cos^2\left(\dfrac{\pi p}{2(n+1)}\right) / p \in [\![1,n]\!]\}$ et

$\forall p \in [\![1,n]\!], E_{\lambda_p}(A) = \text{Vect}\,(X_p)$ où $\lambda_p = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi p}{n+1}\right)$ et $X_p = (\sin\dfrac{p\pi}{2(n+1)}, \sin\dfrac{2p\pi}{2(n+1)}, \cdots, \sin\dfrac{np\pi}{2(n+1)})$.

4. Donner le polynôme caractéristique de A.
5. Calculer $4\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \cos^2\left(\dfrac{p\pi}{2n+2}\right)$.
6. Déduire de ce qui précède que A est inversible.

Exercice II

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.
3. Justifier que $(X-3)^2(X-1)$ est un polynôme annulateur de A.
4. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
5. Montrer que A^{-1} est un polynôme matriciel de A.
6. Rappeler la définition de la division euclidienne d'un polynôme P_1 par un polynôme P_2 non nul.
7. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
8. Expliciter l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
9. Montrer que $\mathscr{P} = \{P(A) / P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier qu'il est de dimension finie et en déterminer une base.