classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°5$

PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 10 Janvier 2026
Durée : 4 heures
Sujet Type CCINP/E3A

— L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique ou document est interdit.
— L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte : un exercice et deux problèmes indépendants.
— Le candidat est prié de numéroter ses copies.
— Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
— Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Exercice

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Montrer que $T = D + N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice nilpotente et $ND = DN$.
4. En déduire T^n.
5. Justifier **sans les calculer** que les coefficients de A^n sont de la forme $\alpha 3^n + (-1)^n(\beta + \gamma n)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
6. On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + 5u_{n+1} + 3u_n$.
   (a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   Justifier que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire l'expression de u_n. On pourra juste donner la forme et indiquer seulement comment déterminer de manière précise les paramètres dont u_n dépend.

Problème 1

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \, .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X \, ,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \, .$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1\,.$$

3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.
5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.
6. Utiliser ce qui précède pour résoudre le système différentiel :$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x'(t) & = & y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & x(t) + y(t) \end{array} \right.$$

Partie III - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}\,.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & j = k \\ 0 & \text{si} & j \neq k \end{array} \right. .$$

III.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

7. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
8. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
9. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

III.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

10. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
11. En utilisant 8, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.
12. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Problème II

PARTIE I

Soit $\displaystyle\sum_{n=1} u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$$

I.1. I.1.1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions u_n .

I.1.2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

I.1.3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2. I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

I.2.2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. On note $V = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

I.3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_0(x) = x$;
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de $Id_{\mathbb{R}}$.*On devra séparer les cas de* $x = 0, x > 0, x < 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

PARTIE II

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note g_x la fonction d'une variable réelle, périodique de période 2π , telle que :
pour tout $t \in]-\pi,\pi]$, on ait : $g_x(t) = \operatorname{ch}\left(\dfrac{xt}{\pi}\right)$.

On admet que : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites réelles $(a_p(x))_{p\geqslant 0}$ et $(b_p(x))_{p\geqslant 1}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_x(t) = \frac{1}{2}a_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty}\left(a_p(x)\cos(pt) + b_p(x)\sin(pt)\right)$$

et telles que **la série de fonctions de variable t définies ci-dessus converge normalement sur $\mathbb{R}$.**

II.1.

II.1.1. En utilisant la parité de g_x, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin(nt)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

II.1.2. Calculer les intégrales suivantes, pour tout $(p,n) \in \mathbb{N}^2$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\sin(pt)dt, \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(pt)dt, \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(pt)dt$$

II.1.3. En remplaçant g_x par le développement en série donné ci-dessus, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin(nt)dt = \pi b_n(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\cos(nt)dt = \pi a_n(x)$$

II.1.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $a_n(x)$ et $b_n(x)$.

II.2.

II.2.1. En donnant à t une valeur particulière dans le développement en série de g_x, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $U(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{sh}(x)}$.

II.2.2. A partir de $V(x) = \displaystyle\int_0^x U(t)\,dt$ et du résultat de II.2.1, donner à l'aide des fonctions usuelles une expression de la fonction V définie à la question I.2.3.

II.2.3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\operatorname{ch}^2(\frac{x}{2}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.