PSI **Octobre 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. Éléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$
3. L'endomorphisme de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $\Psi : f \mapsto f'$.
4. f défini par $f((u_n)_n) = (v_n)_n$ où $v_n = u_{n+1} - u_n$.
5. f défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X], f(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ où $a \neq b$
6. f défini par $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$

Exercice 2. Soit A une matrice donnée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u(M) = \mathrm{tr}\,(A)\, M - \mathrm{tr}\,(M)\, A$$

Déterminer ses éléments propres.

Exercice 3. *Matrice compagnon*

1. Soit $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots \vdots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que tout polynôme unitaire P est polynôme caractéristique d'une matrice. On appelle cette matrice, la matrice compagnon de P.

Exercice 4. (CCINP 2019) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.
Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$ et en déduire l'ensemble des matrices qui vérifient ces hypothèses.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$.

1. Montrer que $\forall k, A^k B - BA^k = kA^k$
2. Montrer que , pour tout $k \geq 0$, si $A^k \neq 0$, A^k est vecteur propre de $u : M \longmapsto MB - BM$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 6. (CCINP) Soit l'application φ qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer ses éléments propres.

3. La matrice représentant φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 7. (CCINP) Soient E un espace vectoriel et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Soit $\lambda \neq 0$ valeur propre de $v \circ u$. Montrer que λ est valeur propre de $u \circ v$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, le résultat reste vrai pour $\lambda = 0$.
3. On choisit $E = \mathbb{R}[X], u(P) = P', v(P) = Q$ où Q est la primitive de P nulle en 0. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Conclusion ?

Exercice 8. : Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + C = B + D$.
On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Exprimer χ_M comme produit de deux polynômes de degré n.

Exercice 9. (ENSAM , Centrale)
Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Est-il surjectif ? Injectif ?
3. Donner ses éléments propres.

Exercice 10. (Mines-Télécom 2022) On considère $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ et $B \neq 0$.
On pose

$$\Psi \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(AM)B + M \end{array}$$

1. On définit $\Phi : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$. Montrer que Φ est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que si $M \in \operatorname{Ker}(\Phi)$, alors M appartient à un sous espace propre de Ψ.
3. Montrer ensuite que si M est un vecteur propre de Ψ associé à une valeur propre différente de 1 , alors M et B sont liées.
4. Donner toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propre de Ψ.

Exercice 11. Déterminer le polynôme caractéristique, sans calcul de déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. (Mines 2012)

1. Déterminer les éléments propres sur $\mathbb{C}$ de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer les puissances de A et en déduire les éléments propres sur $\mathbb{C}$ de

$$C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$