

Exercice 1. Éléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2. (CCINP 23) $A = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}.$

3. (CCINP 2019) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$

4. L'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $\Psi : f \mapsto f''.$

5. f défini par $f((u_n)_n) = (v_n)_n$ où $v_n = u_{n+1} - u_n.$

6. f défini par $\forall P \in \mathbb{K}[X], f(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ où $a \neq b.$

Exercice 2. Sans calcul du polynôme caractéristique, montrer que 0 et 5 sont valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et déterminer tous les éléments propres de A

Exercice 3. Soit A une matrice donnée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$$

Déterminer ses éléments propres.

Exercice 4. *Matrice compagnon*

1. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que tout polynôme unitaire P est polynôme caractéristique d'une matrice. On appelle cette matrice, la matrice compagnon de P .

Exercice 5. (CCINP 24) Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit :

$$\varphi(f) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .

2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ .

3. Montrer que 1 est valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.

4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés .

Exercice 6. (CCINP 2019) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$ et en déduire l'ensemble des matrices qui vérifient ces hypothèses.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$.

1. Montrer que $\forall k, A^k B - BA^k = kA^k$
2. Montrer que , pour tout $k \geq 0$, si $A^k \neq 0$, A^k est vecteur propre de $u : M \mapsto MB - BM$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 8. (CCINP) Soit l'application φ qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2 P$ par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer ses éléments propres.
3. La matrice représentant φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 9. (CCINP) Soient E un espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Soit $\lambda \neq 0$ valeur propre de $v \circ u$. Montrer que λ est valeur propre de $u \circ v$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, le résultat reste vrai pour $\lambda = 0$.
3. On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$, $v(P) = Q$ où Q est la primitive de P nulle en 0. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Conclusion ?

Exercice 10. : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + C = B + D$.

On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exprimer χ_M comme produit de deux polynômes de degré n .

Exercice 11. (ENSAM , Centrale)

Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Est-il surjectif ? Injectif ?
3. Donner ses éléments propres.

Exercice 12. (Mines-Télécom 2022) On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $\text{tr}(A) \neq 0$ et $B \neq 0$.

On pose

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \text{tr}(AM)B + M \end{aligned}$$

1. On définit $\Phi : M \mapsto \text{tr}(AM)$. Montrer que Φ est une forme linéaire non nulle.
2. Montrer que si $M \in \text{Ker}(\Phi)$, alors M appartient à un sous espace propre de Ψ .
3. Montrer ensuite que si M est un vecteur propre de Ψ associé à une valeur propre différente de 1 , alors M et B sont liées.
4. Donner toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propre de Ψ .

Exercice 13. Déterminer le polynôme caractéristique, sans calcul de déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. (Mines-Ponts 23) Soient E le $\mathbb{R}$ -ev des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, p et q deux réels avec $p + q = 1$ et $p \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \rightarrow f(px + q)$

1. Montrez que u est un automorphisme de E .
2. Montrez que les vp de u sont dans $] -1, 1 [$
3. Montrez que si f est vecteur propre de u , il existe un entier k tq $f^{(k)} = 0$. En déduire l'ensemble des vecteurs propres de u . [2022 : Question absente] .
4. Calculez $u^n(f)(x)$ par récurrence. [2022 : Question absente].

Exercice 15. (Mines 2012)

1. Déterminer les éléments propres sur $\mathbb{C}$ de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Calculer les puissances de A et en déduire les éléments propres sur $\mathbb{C}$ de

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$