

TD : Equations différentielles

1 Révisions de PCSI

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes. Dans chaque cas, on se demandera si il existe des solutions sur \mathbb{R} :

1. $y' - 2y = xe^{-|x|}$
2. $(e^t - 1)x' + e^t x = 1$
3. $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$

Exercice 2. *Méthode : Utiliser un changement de fonction inconnue.*
Résoudre

$$2xe^y y' + e^y = x^2$$

2 Systèmes différentiels

Exercice 3. Résoudre le système différentiel (H) suivant sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}y + 1 \\ y' = \frac{1}{t}x + 1 \end{cases}$$

indication : poser $u = x + y, v = x - y$.

Exercice 4. 1. Montrer que $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système différentiel (H) suivant :

$$\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = -10x + 5y + 2z \end{cases}$$

3. Quelle est la structure de l'espace des solutions ?

3 Equations différentielles d'ordre 2

Exercice 5. Résoudre $(E) : tx'' + 2(t+1)x' + 2x = 1 - e^{-2t}$ en cherchant une solution de l'équation homogène sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.

Exercice 6. Soit $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$

1. Chercher une solution de (E) développable en série entière.
2. En déduire la résolution de (E) .

Exercice 7. *Méthode : Utiliser un changement de fonction inconnue.*

Résoudre $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z = y' - y$.

Exercice 8. *Méthode : Utiliser un changement de variable (et donc de fonction inconnue).*

Résoudre $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ en posant $x = \pm e^t$.

4 Utilisant le théorème de Cauchy-Schwarz

Exercice 9. (d'après une question de CCINP 21) Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$, Résoudre sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y' = \frac{z_0}{1+tz_0}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 10. Soit p et q deux applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose p impaire et q paire et on considère l'équation différentielle : $(H) y'' + py' + qy = 0$.

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution y_1 de (H) telle que : $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_1$ paire.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution y_2 de (H) telle que : $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1, y_2$ impaire.
3. Montrer que (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) .

5 Plus théorique

Exercice 11. Soit $a : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ . Montrer que les solutions de $y' - a(x)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 12. Soit a une application continue définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) \neq 0$ alors f s'annule au plus un fois sur I .

Exercice 13. Lemme de Gromwall

Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R}^+ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) \geq 0 \text{ et } f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u) du$$

En considérant une inéquation différentielle satisfaite par $F(x) = \int_0^x f(u)g(u) du$, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) \leq a \exp\left(\int_0^t g(u) du\right)$$