Equations différentielles linéaires
L'essentiel à retenir

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

1. Systèmes différentiels

1.1 Généralités et Notations

Définition 1. : Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues.

Une solution sur I de l'équation différentielle (matricielle) du premier ordre, appelée aussi *système différentiel linéaire* : $(\mathcal{S}) : X' = A(t)X + B(t)$ est une application dérivable $X : I \longmapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Pour $i \in \{1, .., n\}$, la $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée $x_i : I \longmapsto \mathbb{K}$ de X dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée $i^{\text{ème}}$ fonction coordonnée inconnue.

En posant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j\in\{1..n\}}$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Par calcul matriciel, (S) s'écrit :

$$\mathcal{S} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Au système S précédent, on lui associe le système différentiel suivant :$X' = A(t)X$ appelé *système homogène associé à* $(\mathcal{S})$, noté $\mathcal{H}$.

Lorsque A est une application constante, plus simplement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le système $X' = AX + B(t)$ est appelé *système différentiel à coefficients constants*.

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit $(\mathcal{S}) : X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont deux applications continues sur I.

Définition 2. : Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on appelle *problème de Cauchy associé à ($\mathcal{S}$) et à la condition initiale* (t_0, Y_0), la recherche des solutions X de $(\mathcal{S})$ sur I telles que : $X(t_0) = Y_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : Le problème de Cauchy associée à une condition initiale (t_0, Y_0) donnée, admet une et une seule solution sur I.

Corollaire :

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
2. Si il existe une solution X de $\mathcal{S}_H$ qui s'annule en un point de I, alors X est la fonction nulle.

1.3 Forme des solutions de S

Propriété 1.

1. Soit $(\mathcal{H}) : X' = A(t)X$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue sur I. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de $(\mathcal{H})$ est un sous espace vectoriel de $C^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
2. Soit $(\mathcal{S}) : X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont deux applications continues sur I. L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \exists Y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}},\ X = Y + X_p\}$$

où X_p est une solution particulière de $(\mathcal{S})$.

En d'autres termes, pour connaître les solutions de $(\mathcal{S})$, il suffit de connaître les solutions de $(\mathcal{S}_H)$ et une solution particulière de $(\mathcal{S})$. Les autres solutions de $(\mathcal{S})$ s'obtiennent comme somme de cette solution particulière avec une solution quelconque de $(\mathcal{S}_H)$

Ainsi la suite de ce chapitre consiste à donner des méthodes pour résoudre $(\mathcal{H})$ et pour trouver une solution particulière de $(\mathcal{S})$.

1.4 Structure de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{H})$.

Propriété 2. :$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie et dim$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$=dim$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$=n

1.5 Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants Dans ce paragraphe , on s'intéresse à un cas **très particulier** : le cas où **le système est homogène et** où A **est constante** et s'identifie donc à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1.5.1 Résolution si A **est diagonalisable** On diagonalise A : $A = PDP^{-1}$. Pour résoudre $X' = AX + B = PDP^{-1}X + B$, on pose $P^{-1}X = Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}X' = Z'$ et le système devient $Z' = DZ + P^{-1}B$ qui s'écrit en n équations différentielles linéaires d'ordre 1 à résoudre séparément. Ensuite, on revient à $X = PZ$. On ne calcule que P^{-1} si B est non nul.
1.5.2 Résolution si A **est trigonalisable** même démarche qu'au paragraphe précédent qui nous amène à résoudre n équations différentielles en commençant par celle où il y a qu'une fonction inconnue et ensuite remplacer dans les autres.

2. Equations linéaires scalaires d'ordre 2

2.1 Problème de Cauchy

Dans ce paragraphe, il s'agit de la résolution des équations différentielles du type : $(\mathcal{E}) : \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'où équations dites scalaires.

- On appelle, solution de $(\mathcal{E})$ sur I, toute fonction $x : t \longmapsto x(t)$ deux fois dérivable sur I telle que : $\forall t \in I, \alpha(t)x''(t) + \beta(t)x'(t) + \gamma(t)x(t) = \delta(t)$.
  On note $\mathcal{S}$, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I puis $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
- On dit qu'un élément t de I est un point singulier de $(\mathcal{E})$ lorsque $\alpha(t) = 0$.
- Dans le cas où I n'a pas de point singulier, on transforme $(\mathcal{E})$ sous la forme : $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ où a, b, c sont des fonctions continues sur I.

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse aux solutions de $(\mathcal{E})$ sans point singulier mise sous forme résolue :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

Et, on considère l'équation homogène associée

$$\mathcal{H} : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

Définition 3. : Problème de Cauchy.
Soit $(t_0, x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^2$.
On appelle, *problème de Cauchy associé à* $(\mathcal{E})$ *et à la condition initiale* (t_0, x_0, y_0), la recherche de solution de :

$$\begin{cases} (\mathcal{E}) : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

2.2 Système différentiel d'ordre un associé à $(\mathcal{E})$

Aux équations différentielles $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{H})$, correspondent les systèmes différentiels d'ordre un suivants

$$\begin{cases} (\mathcal{E}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \\ X' = A(t)X + B(t) \\ \text{avec } X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le système associé à $(\mathcal{H})$ s'obtient en prenant $B(t) = 0$.

2.3 Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire

Théorème de Cauchy-lipschitz linéaire : Pour tout $(t_0, x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une solution unique sur I de $(\mathcal{E})$

(resp : de $(\mathcal{H})$) au problème de Cauchy associé à cette condition initiale.
Corollaire 1 : Si $t_0 \in I$ alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta_{t_0}: & \mathcal{S}_{\mathcal{H}} & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & X & \longmapsto & (X(t_0), X'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme.
En particulier, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie et $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = 2$
Il suffit donc de trouver deux solutions indépendantes de $\mathcal{H}$ pour déterminer une base de $\mathcal{H}$ et en déduire $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.
Corollaire 2 : $x \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow x = x_p + y, y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.
Autrement dit pour résoudre $\mathcal{E}$, on résout $\mathcal{H}$ et on cherche une solution particulière x_p de $\mathcal{E}$.

2.4 Et quand le coefficient de y'' s'annule

En pratique, lorsqu'il existe des points singuliers :
- On scinde l'intervalle en intervalles sans point singulier.
- On résoud l'équation mise sous forme résolue sur chaque sous-intervalle
- On « raccorde »les solutions en imposant qu'elles soient deux fois dérivables aux points singuliers et qu'elles vérifient l'équa diff en ces points

2.5 Méthode pour chercher des solutions de $(\mathcal{H})$ ou $(\mathcal{E})$

2.5.1 Division par une solution de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$: Méthode de Lagrange ou par abaissement de degré

Propriété 3. Si φ est une solution de $\mathcal{H}$ ne s'annulant pas sur I,
- on effectue le changement de fonction $x = y\varphi$.
- on arrive à une nouvelle équation différentielle dont la fonction inconnue est y
- Dans cette nouvelle équation, on pose $z = y'$, alors la nouvelle équation devient une équation du premier ordre en z
- On termine successivement les résolutions des équations : on obtient z, puis y telle que $z = y'$, puis $x = y\varphi$.

2.5.2 Recherche d'une solution somme d'une série entière

Cf exercice pour comprendre la méthode.

2.5.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à résoudre les équations du type : $\forall t \in I, a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ où $a \neq 0$ **indépendant de la variable t de l'équation**, et f une fonction (de t) continue sur I.
1 Ensemble des solutions de l'équation homogène
$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$.
Théorème : Soit (H) : $a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$.
On appelle **équation caractéristique de** (E_0) l'équation :

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

Notons Δ son discriminant.

Alors $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2 et

1. Si $\Delta \neq 0$:
$$\mathcal{S}_H = \{x : I \to \mathbb{C}, t \longmapsto \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$
(r_1, r_2) étant les solutions de l'équation caractéristique.
2. Si $\Delta = 0$:
$$\mathcal{S}_H = \{x : I \to \mathbb{C}, t \longmapsto \lambda\, e^{rt} + \mu\, t\, e^{r\,t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$
r étant la solution double de l'équation caractéristique.

$\boxed{\text{Si } \mathbb{K}=\mathbb{R}}$.

Théorème : Soit $(H)\ \ x''+ax'+bx=0,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$
$\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2.
En notant par Δ le discriminant de l'équation caractéristique $a\,r^2+b\,r+c=0$, on a

1. Si $\Delta>0$:
$$\mathcal{S}_H=\{x:I\to\mathbb{R},t\longmapsto\lambda\,e^{r_1t}+\mu\,e^{r_2t},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$
(r_1,r_2) étant les solutions de l'équation caractéristique.

2. Si $\Delta=0$:
$$\mathcal{S}_H=\{x:I\to\mathbb{R},t\longmapsto\lambda\,e^{rt}+\mu\,t\,e^{r\,t},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$
r étant la solution double de l'équation caractéristique.

3. Si $\Delta<0$:
$$\mathcal{S}_H=\{x:I\to\mathbb{R},t\longmapsto e^{\rho\,t}\left(\lambda\,\cos(\omega\,t)+\mu\,\sin(\omega\,t)\right),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$
$\rho+i\omega$ étant une solution complexe de l'équation caractéristique.

2 Recherche d'une solution particulière pour certains types de second membre

Dans le cas où $f(t)=P(t)e^{mt}$, on peut chercher une solution particulière sous la forme
$y_p:t\longmapsto Q(t)e^{m\,t},Q\in\mathbb{K}[X]$. On reporte y_p dans l'équation avec second membre pour trouver Q.

Dans le cas où $f(t)=(\lambda\cos(kt)+\mu\sin(kt))e^{mt}$ où $(\lambda,\mu,m,k)\in\mathbb{K}^4$,

- Transformer l'équation (E) en posant $x=e^{mt}z$. On obtient une nouvelle équation différentielle dont la fonction inconnue est z et dont le second membre est du type $(\lambda\cos(kt)+\mu\sin(kt))$.
- Si ik n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $(A\cos(kt)+B\sin(kt))$.
- Si ik est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $((At+A')\cos(kt)+(Bt+B')\sin(kt))$.

On est parfois amené à utiliser le
Principe de superposition :

Si le second membre c se décompose de manière simple sous la forme $c=\sum_{k=1}^{n}c_k$ et si pour chaque équation $x''+ax'+bx=c_k$, on peut trouver une solution particulière x_k, alors $\sum_{k=1}^{n}x_k$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.