

Exercice 1. L'application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui à A associe le maximum des modules des racines de son polynôme caractéristique est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

On posera pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et pour $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|C\|_\infty = \max(|a|, |b|)$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver une matrice carrée A et une matrice colonne B telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n + B$.
3. Déterminer l'unique matrice L telle que $L = AL + B$.
4. Montrer que pour toute colonne X , on a $\|AX\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|X\|_\infty$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \|X_n - L\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty$.
6. En déduire la convergence des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vers des limites à calculer.

Exercice 3. On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} A^{2p}$.

Exercice 4. 1. Montrer que l'application définie par $N(A) = \sqrt{\text{tr}(^tAA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tous A et B .
3. Caractériser les couples (A, B) pour lesquels : $N(AB) = N(A)N(B)$.
4. Soit N' une autre norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N'(AB) \leq c N'(A)N'(B)$$

Exercice 5. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\|P\| = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |p_k|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Par un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(P_n)_n$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 6. On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|(m_{i,j})_{i,j}\| = \max_{(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2} |m_{i,j}|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)_n$ soit bornée.
Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_n$ converge vers B .
Montrer que B est la matrice d'un projecteur et en déduire que

$$\text{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda = 1\}$$

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Trouver k tel que $\forall f \in E, N_2(f) \leq k N_1(f)$.
3. On considère $f_n : f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Les f_n sont-elles dans E ? Etudier les limites de (f_n) dans (E, N_1) et (E, N_2) .
4. Les normes sont-elles équivalentes?.

Exercice 8. (CCINP 2023) Soit E un ev euclidien de dim. finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$. Soit $x \in \text{Ker}((f - Id) \cap \text{Im}(f - Id))$.

1. Montrer qu'il existe y tel que $x = f(y) - y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n .
3. En déduire $E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$.
4. Soit $x \in E$. On pose $\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{n}(x + f(x) + f^2(x) + \dots + f^{n-1}(x))$. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers la projection de x sur $\text{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\text{Im}(f - Id)$.

Exercice 9. (CCINP 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp } A} |\lambda|$.

1. Déterminer $\|A\|$ et $\rho(A)$ quand $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
3. (a) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j|$
 (b) En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.
 (c) Montrer que si $\rho(A) < 1$, la suite $(A^k)_k$ converge vers la matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10. (CCINP 24) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique P_a de M_a .
2. (a) Effectuer la division euclidienne de $3P_a$ par P'_a , dérivée de P_a .
 (b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M_a telle que $|\lambda| \geq 1$. Montrer que $|a| \geq \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \geq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que si $|a|$ est assez petit, $(M_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 11. (Centrale PC 2023) Pour tout polynôme réel P et tout entier n , on pose $a_n(P) = \int_0^1 t^n P(t) dt$.

Pour tout polynôme réel P , on pose $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$, $N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(P))^2}$.

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer qu'elles définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que $\forall P \in \mathbb{R}[X], N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P)$ et $N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$.
4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.