Chapitre 2 - Fonctions - Exercices

1 Généralités.

Exercice n° 1

Dans des repères, dessiner des courbes possibles pour :

1. une fonction $f : [1; 5] \to [2; 3]$ qui est injective mais pas surjective ;
2. une fonction $g : [1; 5] \to [2; 3]$ qui est surjective mais pas injective ;
3. une fonction $h : [1; 5] \to [2; 3]$ qui est bijective.

Exercice n° 2

Prouver que l'équation $e^x + x = 1$ a une unique solution réelle.

Exercice n° 3

VRAI ou FAUX ?

a) Une fonction peut être égale à sa dérivée.
b) Deux polynômes différents ont deux dérivées différentes.
c) Une fonction dont la dérivée est nulle est constante.
d) On n'a jamais $f \circ g = g \circ f$.
e) Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) > 0$. Alors f est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$.
f) Il existe des fonctions qui sont paires et impaires.
g) Il existe des fonctions qui sont périodiques et non bornées.

2 Calculer des dérivées

Exercice n° 4

Dériver les fonctions suivantes (qui sont toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$) :

$f_1(x) = \cos(x^2)$	$f_2(x) = e^x \sin x$	$f_3(x) = e^{\sin x}$	$f_4(t) = \cos(7t - \pi)$
$f_5(t) = \cos(3t)^2$	$f_6(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+3}$	$f_7(x) = \ln(x^2 + 1)$	$f_8(x) = \ln(\cos(x) + 2)$

Exercice n° 5

Dériver les fonctions suivantes (après avoir donné leur domaine de définition) :

$f(t) = \sqrt{t^2 - 3t + 1}$	$g(t) = \ln((2t - 1)(t + 7))$	$h(t) = t^2 \ln t$
$i(x) = (2x + 1)^9$	$j(x) = \ln(\sin 9x)$	$k(x) = (\tan x)^2$
$U \mapsto \frac{U-1}{U+7}$	$m(U) = \ln(U^3 - 5U - 4)$	$n(x) = \cos(2x) \times \sin(3x)$

3 Fonctions de référence

Exercice n° 6

Calculer $A = \sin\left(\arcsin(\frac{1}{3}) - \arcsin(\frac{1}{4})\right)$ et $B = \cos\left(\arccos(\frac{1}{3}) + \arccos(\frac{1}{4})\right)$.

Exercice n° 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

Exercice n° 8

Prouver les formules pour les dérivées de Arcsin et Arctan.

Exercice n° 9

L'objectif de cet exercice est de transformer les expressions du type $A\cos t + B\sin t$ en expressions du type $C\cos(t+\phi)$. Cette compétence est importante et doit être bien comprise.

1. Un exemple : $3\cos t + 4\sin t$.
   (a) Justifier qu'il existe un réel ϕ tel que $\cos\phi = \frac{3}{5}$ et $\sin\phi = \frac{4}{5}$.
   (b) Prouver qu'on a alors : $3\cos t + 4\sin t = 5(\cos t\cos\phi + \sin t\sin\phi)$. Conclure.
2. Autre exemple : en procédant de façon analogue à la question **1.** écrire $5\cos t - \sin t$ sous la forme $C\cos(t+\phi)$
3. Cas général.

Exercice n° 10

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(E_1) : $\sqrt{x+1} = 3x-7$	(E_2) : $\mathrm{e}^x = \ln 2$	(E_3) : $\cos(5x - \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$
(E_4) : $\cos x = 0,4$	(I_1) : $\ln(x^2+x-2) < \ln(x+5)$	(I_2) : $\cos(x - \frac{\pi}{5}) < 0$

Exercice n° 11

a) Prouver que la fonction $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ est constante sur $[-1;1]$.
b) Prouver que $\forall x \in [-1;1], \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Exercice n° 12

a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
b) Trouver un résultat similaire sur $\mathbb{R}^{-*}$.

4 Plus difficile...

Exercice n° 13

Résoudre l'équation $x^2 + 3x - 7 + \dfrac{6}{\sqrt{x^2+3x}} = 0$.

Exercice n° 14

On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

a) Etudier la fonction P.
b) Prouver que P a trois racines, et que ces racines sont dans $[-1;1]$. On les nomme : $x_1 < x_2 < x_3$. *(A ce stade de l'exercice, vous ne pouvez pas trouver les valeurs de ces racines)*
c) Exprimer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
d) En déduire :
$$P(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow 2\cos(3\theta) - 1 = 0$$
e) En déduire x_1, x_2 et x_3.

Exercice n° 15

Montrer que pour tout réel strictement positif k, l'équation $2^x + 3^x = k$ admet une unique solution.