PSI **Octobre 2021**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Formes Linéaires et Hyperplans

Exercice 1. 1) Montrer que $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$ est un hyperplan et en déterminer une équation et un supplémentaire.

2) Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi(M) = \operatorname{tr}(M) I_n + M$$

Déterminer la trace et le déterminant de φ .

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels $(a_1, \cdots, a_n)$ deux à deux distincts rangés dans l'ordre croissant.

On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour tout $i \in [1, n]$, $L_i(X) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

1. Pour $n = 3$, expliciter (L_1, L_2, L_3).
2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_1, \cdots, L_n)$ est une base de E.
3. On note $E^\star$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.
   (a) Donner le dimension de $E^\star$.
   (b) Pour $i \in [1, n]$, on pose : $\varphi_i : E \mapsto \mathbb{R}, P \longmapsto P(a_i)$.
   Montrer que $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est une base de $E^\star$.
4. En déduire qu'il existe une unique suite $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

Exercice 3. D'après CCP 2016

1. Montrer que H, hyperplan de E , est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \operatorname{Im}(u - \lambda Id) \subset H$$

Soit u endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer qu'un plan H de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $ax + by + cz = 0$ est stable par u si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}, {}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{K}, {}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \det({}^tA - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.
4. Trouver les plans stables par u.

Exercice 4. Soit $u \in E = C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in E, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \int_0^1 u(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que u est constante

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K}), f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = 0 \Longrightarrow f = 0$$

Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 6.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que φ_A définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \varphi_A(M) = tr(AM)$ est une forme linéaire.
2. Montrer que, toute forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, s'écrit de manière unique sous la forme $\varphi = \varphi_A$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. (Centrale Math 1 2016, 30 mn sans préparation)

1. Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces-vectoriels de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$?
2. Soit p formes linéaires $(f_1, \cdots, f_p)$ sur un $\mathbb{C}$-espace-vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) Le système $(f_1 \cdots, f_p)$ forme une famille libre.
   (b) L'application $f : E \to \mathbb{C}^p, x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_p(x))$ est surjective.
   (c) Il existe une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ d'éléments de E telle que :
   $$det((f_j(x_i))_{i,j}) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \neq 0$$
3. Montrer que : $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow f \in \operatorname{Vect}(f_1, \cdots, f_p)$