PSI
MATHEMATIQUES

Interrogation de cours et méthodes $n°1$

PSI
MATHEMATIQUES
(Mardi 15 Septembre 2020)
(durée : 30 mn)

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(E_1, E_2, \cdots, E_p)$ p sous espaces vectoriels de E.

Question 1. Donner la définition de $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Question 2. Soit E $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie dont une base est $B_E = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, F $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie dont une base est $B_F = (f_i)_{1\leq i\leq p}$ et G $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie dont une base est $B_G = (g_i)_{1\leq i\leq q}$. Quelle est la dimension de $E \times F \times G$ et précisez-en une base .

Question 3. Montrer la linéarité des applications suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - 3y)$.

2. $f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(1), P(2))$.

Question 4. Donner la matrice de f_2, définie précédemment où $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis respectivement de leur base canonique ?

Question 5. Quelle est la méthode la plus rapide pour montrer que $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension p et F est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n.
Soient (B_1, B_1') deux bases de E et (B_2, B_2') deux bases de F.
Soit $A = \mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{B_1',B_2'}(f)$.
Ecrire la relation matricielle qui existe entre A et A'.

Question 7. :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$.

1. Comment s'appelle ce type de matrice ?

2. De quels ordres sont C, D et M ?

3. On suppose $p = q = n$. Faire le produit matriciel $\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & C' \\ D' & B' \end{pmatrix}$ où $(A', B', C', D') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^4$.

Question 8. : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension p et F est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n.

1. Donner la propriété qui caractérise le rang de f en utilisant une certaine matrice bloc composée de 0 et de 1.

2. Quelle est l'écriture matricielle de cette propriété ?