PSI **Novembre 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1.

1. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$.
2. Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\ln(t))^2}{t^a}\,\mathrm{d}t$ suivant les valeurs de a .
3. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Nature de $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
5. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Après avoir justifié son existence, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{(t+2)^2(t+3)}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.*Astuce pour le calcul : écrire* $1 = 1+t^2 - t*t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.
4. par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(u))^n\,\mathrm{d}u$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5\ln x}{(1+x^6)^2}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3.

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$.
2. Plus généralement, montrer que si f est une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$ admettant une limite finie non nulle ou $+\infty$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. Extrait de e3A PSI 2003 : On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1+u_n$ et $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1. On suppose que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, p_n \neq 0$.
   Justifier que si $(p_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Trouver un exemple montrant que la réciproque est fausse.
3. On pose $a_n = \displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Justifier que $\forall t \geq n, e^{-t^2} \leq \dfrac{t}{n}e^{-t^2}$.

(c) En déduire que $(p_n)_n$ converge.

Exercice 6. 1. Soient f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $0 < a < b$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(\varepsilon x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. (CCP 2016) Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 8. (Mines 2021) Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie et la calculer.