classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Septembre 2025

Feuille d'Exercices $n°3$
Intégration sur un intervalle quelconque

Les Exercices Fondamentaux

Exercice 1. Nature de

$$1. \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x \quad 3. \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x \quad 4. \int_0^{+\infty} (\ln(1+x)-\ln x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2. Après avoir justifié son existence, calculer :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{(t+2)^2(t+3)}\,\mathrm{d}t \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t(\text{ Astuce pour le calcul : écrire } 1=1+t^2-t*t).$$

$$3. \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \quad 4. I_n=\int_0^1 (\ln(u))^n\,\mathrm{d}u(\text{ par récurrence }). \quad 5. \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+2t+t^2} \quad 6. \int_0^{+\infty} \frac{x^5\ln x}{(1+x^6)^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3. (CCINP 2024)
On pose $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ avec $n,p\in\mathbb{N}$.

1. Étudier l'existence de cette intégrale.
2. Déterminer une relation de récurrence sur n.

Exercice 4. On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ avec $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que I_n converge pour tout n
2. Montrer que $\forall n\geq 1, I_n=\dfrac{1}{n2^n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-1}$.
3. On pose $J_n=nI_n$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} pour $n\in\mathbb{N}^*$
4. Calculer J_1 . En déduire que $J_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ pour $n\geq 1$.
5. Montrer que $I_n=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ pour $n\geq 1$.

Exercice 5. Donner l'ensemble de définition de $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. (Mines-Telecom 2022)

1. Donner un équivalent de $\dfrac{1}{t}-\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t}$ quand $t\to+\infty$
2. Nature et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7.
1. Montrer que $x\mapsto \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Nature de l'intégrale de $\int_1^{+\infty}(\operatorname{Arccos}(\frac{1}{x})-\operatorname{Arctan} x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\int_1^N(\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.

Par une comparaison série et intégrale, donner un équivalent de $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2$ et en déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Exercice 9. (CCINP 2016)

1. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
2. Existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{t}{n}}{t(1+t^2)} \,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $(I_n)_n$ converge vers 0.

Exercice 10. Extrait de e3A PSI 2003 : On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 + u_n$ et $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1. On suppose que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, p_n \neq 0$.
   Justifier que si $(p_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Trouver un exemple montrant que la réciproque est fausse.
3. On pose $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^n e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ converge. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (b) Justifier que $\forall t \geq n, e^{-t^2} \leq \dfrac{t}{n} e^{-t^2}$.
   (c) En déduire que $(p_n)_n$ converge.

Les Exercices Plus Difficiles

Exercice 11.
1. Montrer que pour tout $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \,\mathrm{d}x \underset{a \to 0}{\sim} -\ln a$.

Exercice 12.
1. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$.
2. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \,\mathrm{d}x$.
3. En déduire un contre-exemple d'une propriété du cours.

Exercice 13.
1. Soient f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ converge, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $0 < a < b$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(\varepsilon x)}{x} \,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \,\mathrm{d}x$ converge et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \,\mathrm{d}x = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x$.
3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 14. (CCP 2016) Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.
On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 15. (Mines 2021) Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$. Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'.
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ est définie et la calculer.

Exercice 16. (Centrale 2022) L'intrus!!
Soit $I = [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < 1$.

1. Justifier que $t \mapsto |z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I et que $f : t \mapsto \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}$.
2. (a) Montrer que $u : t \mapsto 1, v : t \mapsto e^{it}$ et $w : t \mapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

   (b) Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et les expliciter tels que :

$$\forall t \in I, f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{-it}}$$

3. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_I f(t) \, \mathrm{d}t$.