

PSI
MATHEMATIQUES

(Lundi 3 Novembre 2025)

(durée : 30 mn)

Nom :

Prénom :

Interrogation de cours n°2

Question 1. On désigne par $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -e.v.

1. Donner la définition de $E = \prod_{i=1}^n E_i$.
2. Si on suppose que les sev sont de dimensions finies , quelle est la dimension de E ?

Question 2. 1. Définition de deux matrices semblables.

2. En général, comment a-t-on montré que deux matrices sont semblables ?

Question 3. 1. Définition d'un sev F stable par un endomorphisme u .

2. Définition de l'endomorphisme de F induit par u .

Question 4. Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})$, $(A', B'C, C') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer le produit matriciel de $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ par $N = \begin{pmatrix} A' & C' \\ 0_n & B' \end{pmatrix}$.

2. De quelle taille est la matrice M ?
3. Montrer que M est inversible .

Question 5. Donner l'énoncé de la propriété caractérisant le rang d'une application linéaire par une matrice diagonale par blocs.

Question 6. Donner les trois méthodes possibles pour démontrer qu'un sev H est un hyperplan de E .

- 1.
- 2.
- 3.

Question 7. Calculer la trace de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y + 3z, 3x - y + 5z)$$

Question 8. Montrer que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un hyperplan, et en donner un supplémentaire.

Question 9. Que sait-on sur la trace d'un projecteur ?

Question 10. Pour f continue par morceaux sur $[a, b[$, donner la définition de $\int_a^b f(t)dt$ convergente.

Question 11. Donner la nature des intégrales de Riemann.

Question 12. Citer trois critères pour trouver la nature d'une intégrale impropre d'une fonction positive.

- 1.
- 2.
- 3.

Question 13. Donner, en justifiant, la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt.$
2. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt.$
3. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt.$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)(2+t^2)}{(1+t^2)(1+t^3)} dt.$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$

7. Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt;$

Question 14. Citer le théorème de comparaison série/intégrale.

Question 15. Définir une fonction intégrable f sur un intervalle I

Question 16. Donner une intégrale convergente et non absolument convergente.

Question 17. Définition de

1. λ valeur propre de l'endomorphisme u de E
2. du spectre de u sur $\mathbb{K}$
3. d'un vecteur propre x de u
4. du sous espace propre associé à λ
5. Si λ n'est pas valeur propre, que vaut le sous espace propre associé ?

Question 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Définition du polynôme caractéristique de A
2. Quel est son degré ?
3. Quel est son coefficient dominant ?
4. Quel autre coefficient connaît-on aussi ?
5. Quel lien y-a-t-il entre spectre de A et son polynôme caractéristique ?
6. Si A est non inversible, que peut-on dire sur le spectre de A ?
7. Si $1 \in \text{Sp}(A)$, que peut-on dire sur :
 - (a) $A - I_n$?
 - (b) la factorisation de χ_A ?

Question 19. Définition de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Question 20. Citer l'encadrement entre la dimension du sous espace propre associé à une valeur propre et son ordre de multiplicité.

Question 21. Donner les éléments propres de J matrice d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.