PSI **Février 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Intégrales à Paramètre

Exercice 1. (extrait sujet e3a)

1. Domaine de définition I de $f(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^t\sqrt{x^2-1}}$.
2. Montrer que f est C^1 sur I .
3. Montrer que $\forall t \in I, f(t+2) = \frac{t}{t+1} f(t)$. Calculer $f(2n)$.
4. Pour $t > 0$, on pose $\varphi(t) = tf(t)f(t+1)$. Montrer que $\varphi(t) = \varphi(t+1)$. Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Donner un équivalent de f en 0^+.
6. En utlisant la monotonie de f et $\varphi(n)$, montrer que $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$

Exercice 2. 1. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctan(xt)}}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

2. Remarquer que f est impaire.
3. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ puis calculer f'. On utilisera que $\forall x \notin \{-1, 1\}$
$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$$
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{arctan(xt)}}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 3. (CCP 2017) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \text{ch}\,(x\text{sh}\,(t))\,\mathrm{d}t$ est définie , C^∞ sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et une solution développable en série entière de cette équation.

Exercice 4.

1. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{\sin(xt)}{t}\right)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est C^1 , calculer f'.
3. En déduire f.

Exercice 5. :(extraît CCP 2003).

Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
2. Montrer que φ est C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$.
3. Calculer $\varphi''(x)$, $\varphi'(x)$. En déduire $\varphi(0)$.
4. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 6. (ENSIEE 2012) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

1. Montrer que f est C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0. *On pourra utiliser la caractérisation séquentielle de la limite :* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *ssi, pour toute suite* $(x_n)_n$ *cv vers* a*, alors* $(f(x_n))_n$ *cv vers* l*.*
3. Donner un équivalent de f en 0.
4. Etablir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

Exercice 7.

1. Montrer
$$\forall t \in]0,1[,\ 0 \leq \ln(1+t) \leq -\ln(1-t)$$
et en déduire
$$\forall \theta \in [0,\pi], \forall t \in]0,1[,\ |\ln(1+t^2+2t\cos\theta)| \leq 2|\ln(1-t)|$$
2. Montrer que, pour tout θ de $[0,\pi]$, la fonction $t \longmapsto \frac{\ln(1+t^2+2t\cos\theta)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$.
On pose alors
$$\forall \theta \in [0,\pi], F(\theta) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2+2t\cos\theta)}{t} dt$$
3. Calculer $F(\pi)$ à l'aide du DSE de $\ln(1-t)$.
4. Montrer que F est continue sur $[0,\pi]$ et C^1 sur $]0,\pi[$.
5. En déduire l'expression de F sur $[0,\pi]$.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

Exercice 8. (Oral Mines) A l'aide de deux dérivations sous le signe intégrale, montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\, dt = x\text{arctan}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Exercice 9.

1. Dérivabilité de $F : \gamma \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\gamma x}}{x}\, \mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, \mathrm{d}x$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

Exercice 10. (Centrale Math 1 sans préparation PC 2021) Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+x}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Donner les limites de I en $+\infty$ et en 0.(utiliser la caractérisation séquentielle et en 0 la relation de chasles en $\frac{\pi}{2}$ et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$