PSI **Mars 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Isométries vectorielles - Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Exercice 1.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D : x-y+z=0, x+y+z=0$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D : x-y+z=0, x+y+z=0$ qui transforme e_2 en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan $x-y+z=0$.

Exercice 2. Donner nature et éléments caractéristiques des endomorphismes dont les matrices dans une b.o.n.d :

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Résoudre l'équation $X^tXX = I_n$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})/$. Montrer que

$$A \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \text{tr }({}^tAA) = 2 \\ \det(A) = 1. \end{cases}$$

Exercice 5. (CCP 2017)

1. Calculer $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ pour $\theta \neq p\pi$, puis donner leur limite en $+\infty$.
2. On note r une rotation d'angle θ d'un espace euclidien E de dimension 2 ou 3, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k(x)$ pour $x \in E$.
3. Montrer que si u est une isométrie de E espace euclidien, $\text{Ker}\,(u-Id)$ et $\text{Im}\,(u-Id)$ sont supplémentaires et orthogonaux.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)$ pour $x \in E$.

Exercice 6. Soit $M = (m_{ij})_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$. On note, pour tout $j \in \{1..n\}$, C_j le j-ième vecteur colonne de M et U le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. $<,>$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $j \in \{1..n\}$, montrer que $<\sum_{j=1}^{n} C_j, U >=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}$
2. En déduire $|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}| \leq n$.
3. Justifier que : $\forall (i,j) \in \{1..n\}^2, m_{i,j}^2 \leq |m_{i,j}|$
4. En déduire $n \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}|$.

Exercice 7. Une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0$ et ${}^tMM = M{}^tM$.

1. Montrer que $S = {}^tMM$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que son spectre est inclus dans $]0, +\infty[$.
2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S.
3. En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.
4. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0$ et ${}^tMM = M{}^tM$.

Exercice 8. D'après Ecole Navale

Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$. On définit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.
On suppose que ${}^tMJM = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 9. Soit E euclidien et f endomorphisme de E vérifiant :

$$< u, v >= 0 \Longrightarrow < f(u), f(v) = 0 >$$

1. Pour u, v unitaire, calculer $< u + v, u - v >$.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
3. En déduire qu'il existe $g \in O(E)$ telle que $f = \alpha g$.

Exercice 10. (Mines 17) Dans E euclidien, on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives. Montrer que si $f \in S^+(E)$, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, que $\exists h \in S^+(E)$ et que si $g \in S^+(E)$, $\operatorname{Ker}(f + g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.