Isométries vectorielles Et Endomorphismes Symétriques D'un Espace Euclidien

L'essentiel à retenir

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire noté $<,>$, de norme associée $\|.\|$.

1. Isométrie vectorielle

Définition 1 : **Un endomorphisme** f de E est **une isométrie vectorielle** si il conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$

Propriété 1 :

1. Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si et seulement si il conserve le produit scalaire :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ < f(x), f(y) > = < x, y >$$

2. Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Propriété 2 :

1. $O(E) \subset \mathrm{GL}(E)$
2. $Id_E \in O(E)$.
3. L'application réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie verctorielle.
4. La composée d'isométries vectorielles reste une isométrie verctorielle.

Définition 2 : L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $O(E)$ et appelé *groupe orthogonal de E*.
Les isométries vectorielles sont aussi appelées **automorphismes orthogonaux**

Remarque 1. : Un projecteur orthogonal n'est pas un automorphisme orthogonal puisqu'il n'est pas bijectif (sauf Id_E)

Propriété 3 : Soit $u \in O(E)$.

1. $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.
2. Soit F un s.e.v stable par u. Alors
   (a) u_F est un endomorphisme orthogonal.
   (b) $F^{\perp}$ est stable par u.
   (c) $u_{F^{\perp}}$ est un endomorphisme orthogonal.

2. Matrices orthogonales

2.1 Définition et premières propriétés

Lemme : Ecriture matricielle du produit scalaire canonique $<,>$ de $\mathbb{R}^n$.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note (X,Y) les matrices colonnes respectives composés de leurs coordonnées dans la base canonique.

Alors,

1. $< x, y > = {}^tXY$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $(\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), < AX, Y > = < X, Y >) \Leftrightarrow E = I_n$.
   On a utilisé l'abus de notation qui consiste à confondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice colonne composée de ses coordonnées dans la base canonique

Définition 3 :Une matrice Ω de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à Ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien canonique.

Notation : On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 4 : Soient $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, E $\mathbb{R}$-e.v euclidien de dim n .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2. ${}^t\Omega\, \Omega = I_n$ (i.e $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$)
3. $\Omega\, {}^t\Omega = I_n$
4. Les colonnes de Ω forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire canonique.
5. Les lignes de Ω forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire canonique.

On retiendra en particulier qu'une matrice orthogonale Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

2.2 Matrices orthogonales et Isométries vectorielles d'un espace euclidien quelconque

Propriété 5 : Soit M la matrice d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ *dans une base orthonormée* .

f est une isométrie vectorielle si et seulement si M est une matrice orthogonale.

Propriété 6 : Soient une b.o.n $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ une deuxième base de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors

$\mathcal{B}'$ est une b.o.n de E si et seulement si P est une matrice orthogonale. Dans ce cas $P^{-1} = {}^tP$.

Corollaire :

$$\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \Omega \text{ est une matrice de passage entre deux b.o.n de } \mathbb{R}^n$$
$$(\text{ ou de tout autre e.v.e de dimension n}) \; n$$

Propriété 7 :

1. $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \det \Omega \in \{-1, 1\}$.
2. $\forall f \in \mathcal{O}(E), \quad \det f \in \{-1, 1\}$.

2.3 Groupe Orthogonal

Propriété 8 :

1. (a) $\mathcal{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
   (b) $Id_n \in \mathcal{O}(n)$.
   (c) $\forall \Omega \in \mathcal{O}(n), \Omega^{-1} \in \mathcal{O}(n)$
   (d) $\forall (\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{O}(n)^2, \Omega_1\Omega_2 \in \mathcal{O}(n)$
2. On pose

$$\mathcal{SO}(n)(\text{ ou } \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1 \text{ et } {}^tM\, M = I_n\}$$

   (a) $\mathcal{SO}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
   (b) $Id_n \in \mathcal{SO}(n)$.
   (c) $\forall \Omega \in \mathcal{SO}(n), \Omega^{-1} \in \mathcal{SO}(n)$
   (d) $\forall (\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{SO}(n)^2, \Omega_1\Omega_2 \in \mathcal{SO}(n)$

Définition 4 : On appelle $O(n)$ (resp : $SO(n)$) *groupe orthogonal d'ordre* n (resp : *groupe spécial orthogonal d'ordre* n)

3. Orientation d'un espace vectoriel euclidien

3.1 Définition

3.1.1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition 5 : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension n.

1. Deux bases B et B' sont dites de même sens ssi $\det_B(B') > 0$ et
   de sens contraire ssi $\det_B(B') < 0$.
2. Orienter E, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ de E (par exemple la base canonique si $E = \mathbb{R}^n$ et avec ce choix, toute base $\mathcal{B}'$ de même sens que $\mathcal{B}$ est appelée *base directe* alors que toute base $\mathcal{B}'$ de sens contraire à $\mathcal{B}$ est appelée *base indirecte*

3.1.2 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

On choisira comme base de référence, une b.o.n (ainsi, si $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, la base canonique convient toujours).

Soit $\mathcal{B}'$ une autre b.o.n.

$$\mathcal{B}' \text{ base directe} \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

Mais $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = detP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Or puisqu'il s'agit d'une matrice de passage entre deux b.o.n, $detP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \{-1, 1\}$

Finalement,

$$\mathcal{B}' \text{ b.o.n directe } \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

$$\mathcal{B}' \text{ b.o.n indirecte } \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$$

Définition 6 : On appelle $\mathbb{R}$-e.v euclidien orienté, tout e.v euclidien dans lequel on a choisi une orientation.

3.2 Produit Mixte et Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

3.2.1 Produit Mixte

Lemme : Soient B et B' deux b.o.n.d d'un espace euclidien E orienté de dim n. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ n vecteurs de E
Alors $det_B(v_1, \cdots, v_n) = det_{B'}(v_1, \cdots, v_n)$.

Propriété 9 : Soient E un e.v.e orienté de dimension n où $n = 2$ ou 3. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ n vecteurs de E

Le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ ne dépend pas du choix de la b.o.n.d $\mathcal{B}$

Définition 7 : : Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ n vecteurs de E.

On appelle **produit mixte** de $(v_1, \cdots, v_n)$) et est noté $[v_1, \cdots, v_n]$, le déterminant de ces vecteurs dans une b.o.n de

Dans un espace euclidien de dimension 2, on définit l'aire algébrique du parallélogramme de côtés v_1, v_2 comme le produit mixte $[v_1, v_2]$ de la famille libre (v_1, v_2). Si la famille est liée, on convient que l'aire est nulle. Sinon, le signe de cette aire algébrique est positif si (v_1, v_2) est directe et négatif sinon.

Dans un espace euclidien de dimension 3, on définit le volume algébrique du parallélépipède de côtés v_1, v_2, v_3 comme le produit mixte $[v_1, v_2, v_3]$ de la famille libre (v_1, v_2, v_3). Si la famille est liée, on convient que le volume est nul. Sinon, le signe de ce volume algébrique est positif si (v_1, v_2, v_3) est directe et négatif sinon.

3.2.2 Produit Vectoriel : Cette notion n'est définie qu'en dimension 3

Propriété 10 : Soient E un e.v.e orienté de dimension 3 et $(u, v) \in E^2$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall w \in E,\ [u, v, w] =< a, w >$.

Définition 8 : Le vecteur $a \in E$ défini dans la propriété ci-dessus est appelé **produit vectoriel de** u **par** v, noté $u \wedge v$.

Propriété 11 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une b.o.n.d de E.

1. $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
2. $$\begin{array}{cccc} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u, v) & \longmapsto & u \wedge v \end{array}$$
   est bilinéaire et $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$.
3. les vecteurs $u \wedge v$ et u (resp :v) sont orthogonaux.
4. $u \wedge v = 0 \Longleftrightarrow (u, v)$ liés.
5. Si (u, v) est une famille libre, $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E.
6. Soit (x, y, z) (resp : (x', y', z')) les coordonnées de u (resp : v) dans une b.o.n.d de E.
   Alors $u \wedge v$ a pour coordonnées dans cette même base
   $$\left\| \begin{array}{c} yz' - zy' \\ -xz' + x'z \\ xy' - yx' \end{array} \right.$$

Remarque 2. :

1. Quand on a deux vecteurs orthogonaux non nuls , (u, v), on construit facilement une b.o.n.d de E : $(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{u \wedge v}{\|u\|\|v\|})$.
2. La droite orthogonale à un plan dirigé par (u, v) est dirigée par $u \wedge v$.

3.3 Orientation d'une droite ou d'un plan dans un espace euclidien orienté de dimension 3

Définition 9 :

1. Une droite D d'un espace euclidien E de dimension 3 est orientée par le choix d'une base de$D$ c'est à dire un vecteur directeur non nul de D : On dit que deux vecteurs non nuls u et v de D définissent la même orientation si $< u, v >> 0$.
2. Un plan P d'un espace euclidien E de dimension 3 est orienté par le choix d'une base de P c'est à dire deux vecteurs non colinéaires de P : On dit que deux bases (u_1, u_2) et (v_1, v_2) de P définissent la même orientation si $< u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2 >> 0$.

Propriété 12 : Soient deux bases (u_1, u_2) et (v_1, v_2) d'un plan P.
Elles définissent la même orientation ssi $[u_1, u_2, , v_1 \wedge v_2] > 0$.
En conséquence, le choix d'une orientation d'un plan revient à choisir un vecteur normal de ce plan.

4.Isométries vectorielles d'un plan euclidien

4.1 Description générale des éléments de $O_2(\mathbb{R})$

Propriété 13 Le groupe spécial d'ordre 2 est formé des matrices de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

Pour $\theta = 0(2\pi),\ R_\theta = I_2$
Pour $\theta = \pi(2\pi),\ R_\theta = -I_2$
Pour $\theta \neq 0(\pi)$, R_θ n'a pas de valeur propre réelle.
Ce groupe est appelé **groupe des matrices de rotations planes**

Propriété 14 : $O_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R})/det(A) = -1\}$ est l'ensemble des matrices de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$

Propriété 15 :

3. $R_{\theta+2\pi} = R_\theta$.
4. $\forall(\varphi, \varphi') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{gathered} S_\varphi \cdot S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'} \\ (S_\varphi)^{-1} = S_\varphi =^t S_\varphi \\ S_{\varphi'} \cdot R_\varphi = S_{\varphi'-\varphi} \\ R_{\varphi'} \cdot S_\varphi = S_{\varphi+\varphi'} \end{gathered}$$

4.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

4.2.1 Les rotations

On suppose que E est un espace vectoriel **orienté** de dimension 2.

On note $SO(E) = \{f \in O(E)/det(f) = 1\}$.

On a $f \in SO(E) \Longleftrightarrow Mat_B(f) \in SO(2)$ où B est une b.o.n de E.

Propriété 16 : Soit $f \in SO(E)$ distinct de $\pm Id_E$.

Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de f dans *toute base orthonormée directe* soit la matrice R_θ.On dit que f est la *rotation d'angle* θ . On dit que la nature de f est une rotation et θ en est son élément caractéristique.

Remarque 3. :

1. L'angle de la rotation est défini à 2π près. On dit que θ est *une mesure* de l'angle de la rotation.
2. Cette définition coïncide avec celle des rotations du plan complexe, qui sont les applications de la forme $z \longmapsto e^{i\theta} z$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 17 :

1. Soit u et v deux rotations d'angles respectifs, θ et θ', alors $u \circ v$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
2. Soit $f \in SO(E)$ distincte de $\pm Id_E$. f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$.

Remarque 4. :

1. L'angle de la rotation est définie à 2π près. On dit que θ est *une mesure* de l'angle de la rotation.
2. Cette définition coïncide avec celle des rotations du plan complexe, qui sont les applications de la forme $z \longmapsto e^{i\theta} z$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 18 :

1. Soit u et v deux rotations d'angles respectifs, θ et θ', alors $u \circ v$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.
2. Soit $f \in SO(E)$ distincte de $\pm Id_E$. f n'est pas diagonalisable et $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$.

4.2.2 Les réflexions

Propriété 19 : Soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$ (c'est-à-dire $f \in O(E)$ et $det(f) = -1$).

1. f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \{-1, 1\}$.
2. f est la réflexion (c'est-à-dire symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) par rapport à la droite $E_1(f)$ parallèlement à $E_{-1}(f)$ qui est aussi $(E_1(f))^\perp$.

4.3 Classification des isométries vectorielles ou matrices orthogonales en dimension 2

Soit $f \in O(E)$ et M une matrice de f dans une b.o.n.d

En pratique , Pour reconnaître f et ses éléments caractéristiques,

1. on montre que $f \in O(E)$ ou $M \in O(2)$.
2. on calcule son déterminant
   (a) ou bien $det(f) = 1$ ou $det(M) = 1$: alors f est une rotation : pour déterminer son angle, on identifie les coeffs de M avec $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
   (b) ou bien $det(f) = -1$ ou $det(M) = -1$: alors f est une réflexion : on détermine $ker(f - Id)$ pour trouve le support et $(ker(f - Id))^\perp$ est la direction

Classification par les points fixes : Soit $f \in O(E)$ et $Fix(f) = ker(f - Id_E)$

1. dim(Fix(f))=0 si et seulement si f est une rotation (éventuellement égale à $-Id_E$.
2. dim(Fix(f))=1 si et seulement si f est une réflexion.
3. dim(Fix(f))=2 si et seulement si $f = Id_E$.

Classification par les valeurs propres : Soit $f \in O(E)$

1. f est une rotation distincte de $\pm Id_E$ si et seulement si 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de f.
2. f est une réflexion si et seulement si 1 et -1 sont valeurs propres de f.
3. $f = Id_E$ si et seulement si 1 est valeur propre double.

4.4 Angle de deux vecteurs d'un espace euclidien de dimension 2
Définition 10 : L'unique $\theta \in \mathbb{R}$ (modulo 2π) tel que $Rot_\theta(U) = V$ est appelé *angle de u et v*, noté $(\widehat{u,v})$.
Propriété 20 :Soient $(u, v) \in E \times E$ non nuls et $\mathcal{B}$ une b.o.n.d de E.

1. $< u, v >= \|u\|\|v\| \cos\left((\widehat{u,v})\right)$.
2. $det_{\mathcal{B}}(u, v) = \|u\|\|v\| \sin\left((\widehat{u,v})\right)$.
3. $(< u, v >)^2 + (det_{\mathcal{B}}(u, v))^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.
4. Si R_θ est la rotation d'angle θ, alors pour tout vecteur a unitaire, on a
   $\cos(\theta) =< a, R_\theta(a) >,\ \sin(\theta) = det_{\mathcal{B}}(a, R_\theta(a))$.

5. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3
On considère E un e.v.e orienté de dimension 3, $\mathcal{B}$ une b.o.n.d de E, $f \in O(E)$ et $\Omega = Mat_{\mathcal{B}}(f) \in O_3(\mathbb{R})$.
Propriété 21 :Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ dont on note (C_1, C_2, C_3) ses vecteurs colonnes dans l'ordre.

1. $A \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $C_1 \wedge C_2 = C_3$.
2. $A \in O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $C_1 \wedge C_2 = -C_3$.

Propriété 22 : f a au moins une valeur propre réelle λ et $\lambda \in \{1, -1\}$.
Propriété 23 : Soit λ une valeur propre réelle de f et x_0 un vecteur propre associé.
On pose : $D = \text{vect}\left(I = \frac{x_0}{\|x_0\|}\right)$ et $H = D^\perp$.
1. H est stable par f.
2. l'endomorphisme de H induit par f, qu'on note g est un endomorphisme orthogonal d'un e.v.e de dim 2.
3. On a quatre cas possibles pour f :
   - 1er cas : $\lambda = 1$ et g est une rotation.
   - 2ème cas : $\lambda = 1$ et g est une réflexion.
   - 3ème cas : $\lambda = -1$ et g est une rotation.
   - 4ème cas : $\lambda = -1$ et g est une réflexion.

4. a.**Dans le premier cas**, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une b.o.n.d (I, J, K) dans laquelle :

$$Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On appelle f, **rotation d'angle θ et d'axe D**.
On dit que D et θ sont les éléments caractéristiques de f.
Il faut remarquer que :
det(f)=1 et si $\theta = 0(2\pi), f = Id_E$ et sinon $D = \ker(f - Id_E)$.
b. **Dans le 2ème cas**, il existe une b.o.n.d (I, J, K) dans laquelle :

$$Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est une **réflexion de plan** $P = \text{vect}(I, J)$.
Il faut remarquer que :
det(f)=-1, Ω est symétrique, $P = \ker(f - Id_E)$ et $P^\perp = \ker(f + Id_E)$.
c. **Dans le troisième cas**, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une b.o.n.d (I, J, K) dans laquelle :

$$Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pour $\theta \neq 0(\pi)$.
f est **la composée d'une rotation d'axe** $D = \ker(f+Id_E)$**, d'angle θ et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe**.
Il faut remarquer que :
det(f)=-1 et Ω n'est pas symétrique.
d. **Dans le quatrième cas**, il existe une b.o.n.d (I', J', K') dans laquelle :

$$Mat_{(I,J,K)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode à suivre pour déterminer nature et éléments caractéristiques d'une isométrie vectorielle d'un e.v.e de dim 3 :

Première étape : Montrer que f est une isométrie vectorielle i.e les vecteurs colonnes de Ω forment une b.o.n de E ou ${}^t\Omega\Omega = I_3$.

Deuxième étape : On calcule le déterminant de f ou on fait $C_1 \wedge C_2$.

1. Si det(f)=1 (ou $C_1 \wedge C_2 = C_3$) : On peut dire que f est une rotation.

- On détermine son axe $D = \ker(f - Id_E)$.
- On détermine son angle θ par :
  - son cosinus par $tr(f) = 1 + 2\cos(\theta)$
  - Pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$, on remarque qu'il est de même signe que le produit mixte de $[X, f(X), I]$ où I est un vecteur directeur de l'axe et $X \notin D$.

2. Si det(f)=-1 (ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$) :

- **ou bien** Ω est symétrique : f est alors une réflexion de plan qu'on détermine par $\ker(f - Id_E)$.
- **ou bien** Ω n'est pas symétrique : f est alors la composée d'une rotation et d'une réflexion
  - On détermine l'axe de la rotation par $\ker(f + Id_E)$.
  - On détermine le plan de la réflexion par $(\ker(f + Id_E))^{\perp}$.
  - On détermine l'angle de la rotation par :
    - son cosinus par : $tr(f) = -1 + 2\cos(\theta)$
    - Pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$, on remarque qu'il est de même signe que le produit mixte de $[X, f(X), I]$ où I est un vecteur directeur de l'axe D de la rotation et $X \notin D$.

Classification par les points fixes : Soit $f \in O(E)$ et $Fix(f) = ker(f - Id_E)$

1. dim(Fix(f))=0 si et seulement si f est la composée d'une rotation et d'une réflexion de plan orthogonal à l'axe de rotation ou est $-Id_E$.
2. dim(Fix(f))=1 si et seulement si f est une rotation.
3. dim(Fix(f))=2 si et seulement si f est une réflexion par rapport à $Fix(F)$.
4. dim(Fix(f))=3 si et seulement si $f = Id_E$.

6. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension n.

6.1 Définitions et premières propriétés

Définition 11 : Un endomorphisme u de E est dit *symétrique* lorsque :

$$\forall (x, y) \in E \times E, < u(x), y >=< x, u(y) >$$

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Définition 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice symétrique lorsque ${}^tA = A$.
On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques à coefficients réels (on dit matrice symétrique réelle) : $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = M\}$.

Propriété 23 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in S(E) \iff$ si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$est une b.o.n de E, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

Corollaire :

$S(E)$ est isomorphe à $S_n(\mathbb{R})$ et $dim(S(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 24 : Stabilité.

1. Soit u un endomorphisme symétrique de E et F un s.e.v de E stable par u.
   Alors $F^{\perp}$ est stable par u et u_F et $u_{F^{\perp}}$ sont symétriques.
2. Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme symétriques de E .
   Alors $E_{\mu}(u)$ et $E_{\lambda}(u)$ sont orthogonaux.

6.2 Théorème Spectral

Lemme : Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$.

Corollaire : Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème spectral : Si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u. Autrement dit, tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable dans une b.o.n de E.

En terme matriciel, on obtient : Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable dans une b.o.n de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire il existe une matrice de passage orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $D =^t PAP$.