

1 Les isométries vectorielles

- Exercice 1.**
- Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D : x - y + z = 0, x + y + z = 0$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D : x - y + z = 0, x + y + z = 0$ qui transforme e_2 en $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.
 - Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan $x - y + z = 0$.

Exercice 2. L'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée d'un espace euclidien.

Déterminer la nature de f .

Exercice 3. Donner nature et éléments caractéristiques des endomorphismes dont les matrices dans une b.o.n.d :

$$A_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \text{tr}(A^T A) = 2 \\ \det(A) = 1. \end{cases}$$

Exercice 5. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $A^T = A^2$?

Exercice 6. Soit E un \mathbb{R} -euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u(e_i) = e_{i+1}, u(e_n) = e_1.$$

- Que peut-on dire des cas $n = 2$ et $n = 3$?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'endomorphisme u est-il une isométrie ?
Préciser si elle est directe ou indirecte selon la valeur de n .
- On suppose à présent que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u défini comme précédemment.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$, donner le rang de $u - \lambda \text{Id}_E$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
On notera P la matrice de u .
- Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_n \end{pmatrix}$$

Exprimer A en fonction de P et en déduire les valeurs propres complexes de A .
La matrice A est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? sur \mathbb{R} ?

Exercice 7. Soit $M = (m_{ij})_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$. On note, pour tout $j \in \{1..n\}$, C_j le j -ième vecteur colonne de M et U le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées valent 1 dans la base canonique de \mathbb{R}^n . \langle, \rangle désigne le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

1. Pour tout $j \in \{1..n\}$, montrer que $\langle \sum_{j=1}^n C_j, U \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}$
2. En déduire $|\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j}| \leq n$.
3. Justifier que : $\forall (i, j) \in \{1..n\}^2, m_{i,j}^2 \leq |m_{i,j}|$
4. En déduire $n \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |m_{i,j}|$.

2 Les endomorphismes autoadjoints

Exercice 8. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X], \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Montrer que l'application $u : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$ est un endomorphisme autoadjoint de E et que ses valeurs propres sont négatives.

Exercice 9. Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^T M = M M^T$.

1. Montrer que $S = M^T M$ est diagonalisable sur \mathbb{R} et que son spectre est inclus dans $]0, +\infty[$.
2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S .
3. En déduire que $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.
4. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^T M = M M^T$.

Exercice 10. On munit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ dont la matrice associée dans la base canonique est antisymétrique.

1. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.
 (b) Montrer que $\det(A) = 0$ et que son spectre est réduit à $\{0\}$.
 (c) Montrer que $(I_{2n+1} - A)$ et $(I_{2n+1} + A)$ sont inversibles.
2. On pose $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \in O(2n + 1)$ puis que $\det(B) = 1$.
3. (a) Montrer que $(I_{2n+1} - A)$ et $(I_{2n+1} + A)^{-1}$ commutent.
 (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}$ telle que $(I_{2n+1} + A)$ est inversible et $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \in O(2n + 1)$ telle que $-1 \notin Sp(B)$. Montrer que A est antisymétrique et que son endomorphisme f associé dans la base canonique vérifie : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

Exercice 11. En s'inspirant de la démonstration montrant que les valeurs propres de toute matrice symétrique à coefficients réels sont réelles, montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique à coefficients réels sont des imaginaires purs.

Exercice 12. (CCINP) Soit E espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\ell \in \mathcal{L}(E)$, supposé autoadjoint.

On suppose qu'il possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

- a) Montrer que $\lambda_1 \leq (\ell(x)|x) \leq \lambda_n$.
- b) Montrer l'équivalence

$$(\ell(x)|x) = \lambda_1 \iff \ell(x) = \lambda_1 x.$$

Exercice 13. D'après Ecole Navale

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que $Sp_{\mathbb{R}}(M) \neq \emptyset$ et $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}^+$.
2. Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$. On définit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.
 On suppose que ${}^t M J M = J$. Montrer que A et D sont inversibles.