MATHS PC 2019-2020 :
SUJET ⋆
MINES-TÉLÉCOM-CENTRALE

I -

I.A- .

I.A.1) Soit x un réel strictement positif.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et qu'elle vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$$

I.A.2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \to 0^+$, dont on donnera la valeur.

I.A.3) Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On désigne désormais par F la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

On admet que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[c, +\infty[$ et vérifie :

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \frac{1}{x}$$

I.B- Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-at} - \mathbf{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

On pourra utiliser la fonction F précédente.

I.C- Dans cette question, on considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\left(1 - \mathbf{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$, dans laquelle x est un réel strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 1.

I.C.1) Montrer que cette intégrale est convergente.

I.C.2) Vérifier que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$\left(1 - \mathbf{e}^{-t}\right)^n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1 - \mathbf{e}^{-kt})$$

I.C.3) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t}\left(1 - \mathbf{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$.

II -
Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application Δ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X + 1) - P(X)$$

Cette application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, ce qu'on ne demande pas de justifier. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme Δ^n obtenu en composant n endomorphismes égaux à Δ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

On considère la famille de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_n(X) = \dfrac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X+j) \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Dans les questions qui suivent, n désigne toujours un entier supérieur ou égal à 1.

II.A- .

II.A.1) Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

II.A.2) Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta(P_k)(X)$ en fonction de $P_{k-1}(X+1)$. Donner également la valeur de $\Delta(P_0)$.

II.A.3) Soit m un entier supérieur ou égal 1 et k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta^m(P_k)$ en distinguant les cas : $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $m = k$ et $m \geqslant k+1$.

II.A.4) Déduire de ce qui précède que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

II.B- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Démontrer que le polynôme $\Delta^n(P)$ est donné par la formule

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$$

On pourra effectuer une récurrence.

II.B.2) En déduire, pour tout entier r vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$, l'égalité suivante,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(X+k)^r = 0 \tag{II.1}$$

III -

Dans toute cette partie, n et r désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 et x un réel strictement positif.

III.A- .

III.A.1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t^r}\left(1-\mathbf{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$ est convergente.

III.A.2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t^r}\left(1-\mathbf{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $n \geqslant r$.

Désormais, on suppose la condition $1 \leqslant r \leqslant n$ vérifiée. On définit la fonction F_r qui à $x > 0$ associe :

$$F_r(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathbf{e}^{-xt}}{t^r}\left(1-\mathbf{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$$

On admet que la fonction F_r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que si $r \leqslant n-1$, on a

$$\forall x > 0,\ F'_{r+1}(x) = -F_r(x)$$

III.B- III.B.1) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - \mathbf{e}^{-t} \leqslant t$.

III.B.2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$0 < F_r(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1-r}}\int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-u}u^{n-r}\,\mathrm{d}u$$

III.B.3) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F_r(x) = 0$.

III.C- On définit la fonction G_r qui, à $x > 0$, associe :

$$G_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^{r-1}\ln(x+k)$$

On suppose dans cette question que $1 \leqslant r \leqslant n-1$.
Montrer que $\forall x > 0,\ G'_{r+1}(x) = -G_r(x)$.

III.D- Dans cette question, on utilisera le résultat $\lim\limits_{x \to +\infty} G_r(x) = 0$ qu'on admet pour l'instant.

Montrer par récurrence sur l'entier r variant de 1 à n, qu'on a : $\forall x > 0,\ F_r(x) = G_r(x)$.

III.E- Le but de cette question est d'établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} G_r(x) = 0$. On utilisera l'égalité (II.1).

III.E.1) Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n-1$

$$\forall x > 0, \quad G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$$

III.E.2) Rappeler le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre r lorsque u tend vers 0. En utilisant ce développement limité pour la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{k}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, montrer que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j x^j} \right) + \mathrm{o}\,(1)$$

où $\mathrm{o}\,(1)$ désigne une fonction admettant pour limite 0 lorsque $x \to +\infty$.

Vérifier qu'il existe des constantes A_s, où s est un entier relatif compris entre $-r$ et $r-1$, telles que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{s=-r}^{r-1} A_s x^s + \mathrm{o}\,(1) \qquad \text{quand } x \to +\infty$$

III.E.3) Montrer que, pour tout entier s vérifiant $0 \leqslant s \leqslant r-1$, la constante A_s est nulle.

III.E.4) En déduire que, pour tout entier r vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} G_r(x) = 0$.

IV -

Dans cette partie, a est un réel fixé.

IV.A- Dans cette question, on suppose que a est un entier relatif négatif.

IV.A.1) Préciser la valeur de $P_n(a)$ lorsque $n \geqslant |a| + 1$. En posant $p = |a|$, donner la valeur de $P_n(a)$ lorsque $0 \leqslant n \leqslant p$ en fonction de $\dbinom{p}{n}$.