

**Devoir Libre**  
**MATHEMATIQUES Algèbre**  
**PSI**  
**Mines**

Endomorphismes échangeurs

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont  $\mathbb{C}$ , le corps des complexes, pour corps de base.

Etant donnés deux entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls, on note  $M_{n,p}(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (et  $0_{n,p}$  sa matrice nulle) et  $M_n(\mathbb{C})$  celui des matrices carrées à  $n$  lignes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (et  $0_n$  sa matrice nulle).

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On note  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ .

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que

$$E = F \oplus G, u(F) \subset G \text{ et } u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes  $u$  et  $v$  de  $E$ , on dit que  $v$  est **semblable** à  $u$  lorsqu'il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $E$  tel que  $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ . On notera que dans ce cas  $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$ , si bien que  $u$  est semblable à  $v$ .

On dit que  $u$  est **de carré nul** lorsque  $u^2$  est l'endomorphisme nul de  $E$ . On dit que  $u$  est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel  $n \geq 1$  tel que  $u^n = 0$ .

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est dite **de carré nul** lorsque  $A^2 = 0$ .

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

- (C1) l'endomorphisme  $u$  est échangeur ;
- (C2) il existe  $a, b \in \mathcal{L}(E)$ , tous deux de carré nul, tels que  $u = a + b$  ;
- (C3) les endomorphismes  $u$  et  $-u$  sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

## A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme  $u$  de  $E$ .

1. Montrer que si  $u$  vérifie la condition (C3) alors  $u$  est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose  $u$  de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe  $\delta$  tel que  $\delta^2 = -\det(u)$ .

2. Montrer que  $u^2 = \delta^2 I_E$ , déterminer le spectre de  $u$  et préciser la dimension des sous-espaces propres.
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de  $u$ , une droite vectorielle  $D$  telle que  $u(D) \not\subset D$  et en déduire que  $u$  est échangeur.

## B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Soient  $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$  et  $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ . On considère dans  $M_{n+p}(\mathbb{C})$  la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

- Calculer le carré de la matrice  $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$  de  $M_{n+p}(\mathbb{C})$ . Montrer ensuite que  $M$  est la somme de deux matrices de carré nul.
- On considère dans  $M_{n+p}(\mathbb{C})$  la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

Montrer que  $D$  est inversible, calculer  $D^{-1}$  puis  $DM D^{-1}$ , et en déduire que  $M$  est semblable à  $-M$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose que  $u$  est échangeur et on se donne donc une décomposition  $E = F \oplus G$  dans laquelle  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels vérifiant  $u(F) \subset G$  et  $u(G) \subset F$ .

- On suppose ici  $F$  et  $G$  tous deux non nuls.  
On se donne une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$  et une base  $(g_1, \dots, g_p)$  de  $G$ .  
La famille  $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$  est donc une base de  $E$ .  
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice  $u$  dans  $B$ .
- Déduire des questions précédentes que  $u$  vérifie **(C2)** et **(C3)**. *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces  $F$  ou  $G$  est nul.*

## C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie,  $u$  désigne un automorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $E$  tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

- Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^2 = 0$ . Comparer  $\ker(f)$  à  $\text{Im}(f)$  et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2} \dim(E)$$

- Démontrer que  $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$ , et que  $\ker(a) = \text{Im}(a)$  et  $\ker(b) = \text{Im}(b)$ .
- En déduire que  $u$  est échangeur.

## D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$ . On se donne un nombre complexe arbitraire  $\lambda$ . On pose  $v = f - \lambda I_E$ .

- Montrer que la suite  $(\ker(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante pour l'inclusion.
- Montrer qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que

$$\forall k \geq p, \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

*On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme  $\ker(v^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .*

Montrer qu'alors

$$\ker(v^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(v^k)$$

et que  $p$  peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair  $p$  donné par la question 12 et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On notera que  $E_\lambda^c(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

13. Montrer que  $E_\lambda^c(f) = \ker(v^{2p})$  et en déduire

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \text{Im}(v^p)$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels  $E_\lambda^c(f)$  et  $\text{Im}(v^p)$  sont tous deux stables par  $f$ .

14. Montrer que  $\lambda$  n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\text{Im}(v^p)$ . Montrer que si  $E_\lambda^c(f)$  n'est pas nul alors  $\lambda$  est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E_\lambda^c(f)$ .

15. On se donne ici un nombre complexe  $\mu \neq \lambda$ . On suppose que toute valeur propre de  $f$  différente de  $\lambda$  est égale à  $\mu$ .

Montrer que  $\text{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$ , puis que  $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$ .

On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $\text{Im}(v^p)$ .

## E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant.

**Théorème** : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif  $u$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $E$  tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

16. Montrer que  $a$  et  $b$  commutent avec  $u^2$ .

On fixe maintenant un entier pair  $p$  tel que  $E_0^c(u) = \ker(u^p)$ , donné par la question 12.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel  $G = \text{Im}(u^p)$  est stable par  $a$  et  $b$  et que les endomorphismes induits  $a_G$  et  $b_G$  sont de carré nul.

18. En déduire que  $u$  est échangeur. On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie C.

## F. La condition (C3) implique (C1)

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit **indécomposable** lorsque

- (i) la condition (C3) est vérifiée par  $u$
- (ii) il n'existe aucune décomposition  $E = F \oplus G$  dans laquelle  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces non nuls, stables par  $u$  et tels que les endomorphismes induits  $u_F$  et  $u_G$  vérifient tous deux la condition (C3).

Jusqu'à la question 21 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable  $u$  de  $E$ . On dispose en particulier d'un automorphisme  $\varphi$  de  $E$  tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

19. Montrer que  $\varphi^2$  commute avec  $u$ .

20. Montrer que  $\varphi^2$  possède une unique valeur propre  $\lambda$ . En déduire que les valeurs propres de  $\varphi$  sont parmi  $\alpha$  et  $-\alpha$ , pour un certain nombre complexe non nul  $\alpha$ .  
*On utilisera l'indécomposabilité de  $u$  ainsi que les résultats des questions 13 et 14.*
21. En déduire que  $u$  est échangeur.  
*On pourra appliquer le résultat final de la question 15.*
22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C3)** implique la condition **(C1)**.