

1 Algèbre linéaire sans réduction

1.1 CCINP

Exercice 1. (CCINP sans préparation 2025 Morgan) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

1. Rappeler la définition de matrices semblables.
2. Montrer que si A est inversible alors AB est semblable à BA .
3. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 2. (ENSAM, Centrale, CCINP)

Pour f continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}_+ .
2. Est-il surjectif? Injectif?
3. Donner ses éléments propres.

1.2 Mines-Télécom

Exercice 3. On étudie les matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1) :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_{kk})$$

c'est-à-dire les matrices dont les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice.

1. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices vérifient-elles la condition (1)?

2. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M_{u,v}$ vérifie la condition (1).

3. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1)?

1.3 Mines

Exercice 4. (Mines sans préparation 2025 Mohamed) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$, $A^{p-1} \neq 0$, puis que $p \leq 4$.
2. On suppose $p = 4$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Réduction

2.1 CCINP

Exercice 6. (CCINP 2025 Cyril) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A est symétrique et $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.

1. Justifier que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .
2. Si P est un polynôme annulateur de A , que sait-on sur le spectre de A et l'ensemble des racines de A ?
3. Déterminer l'ensemble des matrices A vérifiant les hypothèses données.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. Donner 2 CNS de diagonalisabilité.
2. Justifier que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset \{2; 3\}$.
3. Soit $D = \text{diag}(2, \dots, 2, 3, \dots, 3)$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MD + DM \end{array}$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Étudier les éléments propres de f .

Exercice 8. (CCINP 2025 Diane)

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver le polynôme caractéristique
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres
3. Est-ce que M est diagonalisable?
4. Trigonalisable? La trigonaliser.
5. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -5x - 4y - 2z \\ y' = 3x + 5y \\ z' = 3x \end{cases}$$

Exercice 9. (CCINP sans préparation 2025 Mohamed)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P - P'$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. f est-il diagonalisable?
3. f est-il bijectif?
4. Déterminer l'antécédent de X^i par f pour $0 \leq i \leq 3$. En déduire f^{-1} .
5. Généraliser le résultat pour f endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A .
2. Trouver les matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$. Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé.

On souhaite résoudre le système différentiel suivant $(S) : \begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$

3. On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$. Trouver un système d'équations vérifié par $U(t)$ et effectuer la résolution de ce système.

On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant $(S') : \begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$

4. On pose $V(t) = P^{-1}X(t)$. Trouver un système d'équations vérifié par $V(t)$.

5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de (S') est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 11. Soit $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_a de M_a .
 b) Effectuer la division euclidienne de $3\chi_a$ par χ'_a .
 c) M_a est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
2. On suppose que λ est une valeur propre complexe de M_a telle que $|\lambda| > 1$.
 a) Montrer que $|a| > \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} > \frac{1}{2}$.
 b) Montrer que $(M_a)^n$ tend vers 0 pour a suffisamment petit.

Exercice 12. 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

2. (a) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ des réels, où $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $a_{2p+1-i,i} = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq 2p$, les autres coefficients étant nuls.
 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Écrire la matrice A .
- (b) Soit $E_i = \text{Vect}(e_{2p+1-i}, e_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ où (e_1, \dots, e_{2p}) est la base canonique de \mathbb{R}^{2p} .
 Montrer que E_i est stable par f .
- (c) Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la restriction de f à E_i est diagonalisable.
- (d) En déduire une CNS pour que f soit diagonalisable.

Exercice 13. Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = XX^T$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang et le spectre de A .
3. Calculer le polynôme caractéristique de A .
4. Montrer l'égalité $\det(I_n + A) = 1 + X^T X$.

2.2 Mines-Télécom

Exercice 14. (IMT 2025 Cyril) Soit E \mathbb{K} -ev de dim 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f^2$ et tel que $\dim(\text{Ker}(f - Id_E)) = 1$.

1. Déterminer le spectre de f .
2. Montrer que f^2 est un projecteur.
3. Montrer que la matrice de f peut s'écrire dans une certaine base :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \{0, 1\}$ (pas sûr !!)

Exercice 15. Soit $a > 0$ fixé. On pose $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M admet une unique valeur propre réelle r .
 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \text{tr}(M^n)$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{r^n}$.

Exercice 16. Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f + f^3 = 0$ et $f \neq 0$. On note A sa matrice associée dans la base canonique.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
3. En déduire les valeurs propres réelles de f . A est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ?
4. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Mines

Exercice 17. Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose f^2 projecteur. Donner une CNS portant sur f pour que f soit diagonalisable.

2.4 Centrale

Exercice 18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose M^2 diagonalisable et M inversible. Montrez M diagonalisable.
2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer M diagonalisable.
 - (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tq $(P \circ Q)(M) = 0$.
 - (b) Soient β_1, \dots, β_k les racines distinctes de P . En considérant les polynômes $Q(X) - \beta_j$, montrer que toute vp de M est racine simple de $P \circ Q$ et conclure.

3 Algèbre euclidienne

3.1 CCINP

Exercice 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec A^\top .

1. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 20. 1. Rappelez l'inégalité de Cauchy-Schwarz

2. Montrez, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $(\sum_{i=1}^r \lambda_i)^2 \leq r \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$
3. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $(\text{tr } B)^2 \leq \text{rg}(B) \text{tr}(B^2)$
4. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tq $b_{ii} = 1$ pour tout i et $|b_{ij}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.
 - Exprimez $\text{tr}(B^2)$ et montrez $\text{tr}(B^2) \leq 2n$.
 - Montrez $\text{rg}(B) \geq \frac{n}{2}$.

Exercice 21. (2023,2024)

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. (2023 : On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique)

et f l'endomorphisme canoniquement associé à A

En 2024 : Déterminez une CNS sur (a, b, c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.

En 2023 :

1. Montrez que f est une rotation ssi a, b, c vérifient 3 équations à déterminer.
2. Montrez que f est une rotation ssi a, b, c sont racines de $X^3 - X^2 + p = 0$ avec $p \in [0, \frac{4}{27}]$.
3. Si $b = c \neq 0$, déterminez l'axe de rotation et la valeur de l'angle.

3.2 Mines-Télécom

Exercice 22. (IMT 2025 Diane) (e_1, e_2, \dots, e_n) une famille liée de vecteurs normés tels que $\langle e_i, e_j \rangle = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \forall i, j \neq i$
 $M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$

1. Montrer que M est non inversible.
2. Calculer le déterminant de M et trouver α .

Exercice 23. (IMT 2025 Morgan) Soit f est une isométrie d'un espace euclidien de dim 3. telle que $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ est un polynôme annulateur de f .

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. En déduire que f est une rotation dont on donnera une matrice dans une base adaptée.

Exercice 24. Soit E un espace euclidien de dimension n ; soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs non nuls de E telle que

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 = \|x\|^2$$

1. Montrer que \mathcal{F} est une famille génératrice de E .
2. La famille \mathcal{F} est-elle une base orthonormée de E ?

3.3 Mines

Exercice 25. (Mines Pont 2025 Noah) On se place dans \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique >.

1. Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$.
2. Montrer que $\exists (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n$ tq $(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)$. *indication : commencer par $n = 2$ et $n = 3$*

Exercice 26. Soit $\varphi_0 : x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$$

2. Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], (H_n|P) = (H_{n-1}|P')$.
 b) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale.
 c) Calculer $\|H_n\|^2$.

4. On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$.

Nature et valeur éventuelle.

Exercice 27. Soient n un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient a_0, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls.
 - (a) Déterminer la dimension de $H = \{P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

3.4 Centrale

Exercice 28. (Centrale 2025 (sans préparation 25 minutes)

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ une application bijective vérifiant pour tout $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

On définit $s = f \circ f$.

1. Montrer que s est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit λ une valeur propre de s . Montrer que $\lambda < 0$. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Soit $x \in V_\lambda$ tel que $x \neq 0_E$. On pose $F = \text{Vect}(x, f(x))$. Montrer que F est un plan stable par f et que F^\perp est stable par f .
4. Montrer alors que dans une base orthonormale \mathcal{B} bien choisie, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29. Soient u, v autoadjoints dans E pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ tels que : $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $Sp(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Objectif :

$$\det(u)^{1/2} \cdot \det(v)^{1/2} \leq \det\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{1}$$

Soient $\vec{x}, \vec{y} \in E$. On définit : $B(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle$ et $B'(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | v(\vec{y}) \rangle$.

1. Montrer que B est un produit scalaire. Montrer qu'il existe un unique w tel que :

$$B(\vec{x}, w(\vec{y})) = B'(\vec{x}, \vec{y})$$

2. Justifier que w est diagonalisable et que $Sp(w) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que (1) est équivalent à :

$$\det(w)^{1/2} \leq \det\left(\frac{Id + w}{2}\right)$$

(Note : l'image indique $\det(w)$ sans la puissance 1/2, mais pour la cohérence avec (1), c'est bien la racine qui intervient).

4 Séries numériques

4.1 CCINP

Exercice 30. 1. Énoncé du CSSA

2. Nature de $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 31. (CCINP 2025 Mohamed)

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence de R_n .
2. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 1$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(2\pi en!)$ converge.

3. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 1$.

Exercice 32. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \rightarrow \frac{1}{\text{ch}^n x}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

1. Montrez (I_n) bien définie.
2. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Nature des séries $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$ (indication : montrez $\text{ch} x \geq \text{sh} x$ sur \mathbb{R}^+).
4. Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$?

Exercice 33. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_n^k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

1. Montrez que I_n^k est bien définie.
2. Calculez I_n^k .
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$?
4. Nature de $\sum a_n e^n$ et $\sum a_n (-e)^n$. Donnez le domaine de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
5. Montrez l'égalité $\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

Exercice 34. (donné aux Mines aussi) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$.

1. Montrez que la suite (a_n) est convergente et déterminez $\lim a_n$.
2. Montrez que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3. Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{2n+1}$.
4. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
5. Montrez $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
6. Trouvez une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
7. (Mines) Trouvez une autre expression de $f(x)$ en montrant que $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+t^2)x}{2} \right)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{(1+t^2)x}{2}} dt$ et en calculant cette intégrale.

4.2 Mines-Télécom

Exercice 35. On pose $u_n = n \ln \left(\frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4 + 2n^3} \right)$, pour $n \geq 2$.

1. Etudiez la convergence de $\sum u_n$
2. Calculez la somme de cette série.

Exercice 36. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminez $\lim u_n$.
2. Déterminez la limite de (nu_n) .
3. Nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$?

4.3 Centrale

Exercice 37. 1. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est convergente

2. Exprimez $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ à l'aide de factorielles.
3. Calculez la somme. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

4.4 Mines

Exercice 38. On définit la suite (u_n) par $u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}$, $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\ln(n+3)}$.

1. Montrez que la série $\sum u_n$ est convergente et calculez sa somme.
2. Soit (a_n) une suite réelle tq la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
3. Montrez, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

5 Suites et séries de fonctions

5.1 CCINP

Exercice 39. (CCINP 2024-2021-2019)

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Étudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.
2. Étudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$. [Avant 2024 : Montrez S continue sur \mathbb{R}^+ .]
3. Avant 2024 Montrez $S \in C^1$ sur \mathbb{R}^{+*} .
4. Avant 2024 Calculez S

Exercice 40. On pose $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

1. Montrer que $] - 1; 1[\subset \mathcal{D}_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0; 1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 41. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0, +\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x) dx$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{12}$. On pourra utiliser librement que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 42. (tombé à Centrale aussi)

On pose $f : x \rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \ln nx^n$ et $g : x \rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminez les rayons de convergence de f et g .
2. Montrez que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. Trouvez une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.
4. Montrez que f est continue sur $[-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1
5. Trouvez des équivalents de g et de f en 1^- .

Exercice 43. (2024, 2023, 2021, 2022)

1. Donnez le domaine de définition de $F(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$
2. Montrez, pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
3. 2021 -> 2023 : Montrez, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x) \ln(x)$. On rappelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2021-2022 : *Indication : on pourra procéder à une intégration par parties*].

Exercice 44. 1. Domaine de convergence D de la série de fonctions $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$ définies pour $n \geq 2$

2. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur ce domaine.

3. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. Montrer que $\forall x \in D, |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$

4. Montrer que la somme de cette série est continue sur D .
5. Montrer que la somme de cette série est intégrable sur D .

Exercice 45. On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
2. On pose :

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

Donner une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients non constants vérifiée par f .

3. Rappeler l'expression de Arcsin' puis résoudre l'équation différentielle. En déduire une expression simplifiée de la fonction f .

5.2 Mines-Telecom

Exercice 46. (IMT 2025 Diane) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

1. Montrer que f est définie, 2π -périodique et exprimer $f(\pi - x)$ en fonction de $f(x)$.
2. Montrer que f est $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Exprimer $f'(x)$.

Exercice 47. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 48. On désigne par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur $] -1, 1[$, soit :

$$\forall x \in] -1, 1[, \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur le segment $[-1, 1]$.

5.3 Mines

Exercice 49. (Mines 2025 Noah) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$.

1. À l'aide du DSE de $\ln(1-x)$, montrer que $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+x^2)^n}$ pour $x > 0$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1+x^2)^n}$ CVN sur $[a, +\infty[$. Que peut-on dire de la continuité et des propriétés d'intégration sur sa fonction somme ?
3. À l'aide de la question 1, calculer sa somme.

Exercice 50. Étudiez la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\forall x > 0, f_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$

5.4 Centrale

Exercice 51. On note :

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{3z}{3+z}$$

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
2. On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, g(\theta) = \frac{\sin \theta}{5 + 3 \cos \theta}.$$

Calculer $\text{Im } f(e^{i\theta})$. Montrer que $g(\theta)$ peut s'écrire sous la forme :

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\theta.$$

3. Calculer $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} g(\theta) d\theta$.

6 Intégration

6.1 CCINP

Exercice 52. On pose $F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

1. Montrer que $] -1; 1[\subset \mathcal{D}_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0; 1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 53. (CCINP 2025 Diane) Soit f continue, positive ou nulle .

1. Montrer que : $\int_{\pi}^{+\infty} f(t) dt$ cv $\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$ cv.
2. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument .

Exercice 54. (CCINP 2025 Morgan) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} dx$.

1. Justifier que I_n est définie.
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{1/3}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin(tn^{-1/3})}{1+t^3} dt$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = K$ où $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$.
Est-ce que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ?
4. Montrer que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ par un changement de variable judicieux.
5. Montrer que $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$ et calculer $2K$
6. ?

Exercice 55. On pose : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$.
Déterminer f' .
2. a) Montrer que :

$$\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$

- b) Montrer que

$$\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

- c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

6.2 Mines-Télécom

Exercice 56. Montrer que $f(x) = \int_0^1 \operatorname{ch}(x \operatorname{sh}(t)) dt$ est définie, C^∞ sur \mathbb{R} . Trouver une équation différentielle vérifiée par f et une solution développable en série entière de cette équation.

6.3 Mines

Exercice 57. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que F est définie sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution de $y'' + y = \frac{1}{x}$.

6.4 Centrale

Exercice 58. (Centrale 2025 sans préparation Mohamed) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)e^{-x^2} dx \text{ converge}\}$.

1. Montrer que E est un \mathbb{R} espace vectoriel.
2. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\Phi(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$. Montrer que $\Phi(f, g)$ est bien définie et Φ est un produit scalaire sur E .
3. Sachant que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$.
4. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x^2} dx$.

7 Équations différentielles

7.1 CCINP

Exercice 59. 1. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{t(t^2 - 1)}$

2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation :

$$t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$$

Exercice 60. On définit $(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle dans \mathbb{R} .
2. Soit x une solution non nulle de (E) . Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|x(t)| = 1$.
3. Étudier les variations de $\phi(t) = \frac{t^2}{1+t^4}$ sur \mathbb{R} .
4. Soit x vérifiant (E) . Montrer que l'application qui à t associe $\frac{x(t)^2}{1+x(t)^4}$ est bornée et atteint sa borne supérieure. Atteint-elle sa borne inférieure ?

7.2 Mines-Télécom

Exercice 61. Déterminer les solutions sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'x \ln(x) = y(3 \ln x + 1)$ puis par recollement les solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 62. Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y'' + xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

7.3 Mines

Exercice 63. 1. Montrez que l'équation $(E) : x^2y' + y = x^2$ n'admet pas de solution développable en série entière.
2. Cherchez les solutions de (E) sur \mathbb{R}^{+*}
3. Montrez il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+ [2022 : précisez les solutions qui admettent une limite finie en 0.]

7.4 Centrale

Exercice 64. 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation

$$y' + f(t)y = g(t)$$

admet une unique solution φ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. On exprimera φ à l'aide d'intégrales.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et h une fonction bornée sur \mathbb{R}_+ . Montrer que l'équation

$$y' - ay = h(t)$$

admet une unique solution bornée sur \mathbb{R}_+ .

8 Espaces vectoriels normés et Topologie

8.1 CCINP

Exercice 65. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit U_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré n et scindés sur \mathbb{R} . On se propose de démontrer que U_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n . Montrer que P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$$

2. Conclure.

8.2 Centrale

Exercice 66. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

1. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer que φ est continue sur E si et seulement si φ est continue en 0_E .

2a. On considère l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt.$$

Déterminer $M = \sup\{\varphi(f) \in \mathbb{R} \mid f \in E, \|f\|_\infty = 1\}$.

9 Probabilités

9.1 CCINP

Exercice 67. On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- En admettant la formule de Vandermonde :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall n \leq a + b \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

déterminer l'espérance de X .

- Démontrer la formule de Vandermonde.

Exercice 68. (CCINP Cyril 2025)

Soient $\lambda > 0$ et X , une VAD telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et Y une VAD telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{/(X=n)}$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p) .

- Donner la loi conjointe de (X, Y) .
- Donner la loi de Y
- X et Y sont-elles indépendantes?
- Donner la loi de $Z = X - Y$.

9.2 Mines-Télécom

Exercice 69. (IMT 2025 Cyril) Soit un dé à 3 faces. On lance n fois le dé et on note X (resp : Y) la v.a comptant le nombre de 1 (resp 2). Les lancers sont supposés indépendants. Soit p (resp : q) la proba d'obtenir 1 (resp : 2)

1. Donner les lois de X et Y
2. Donner la loi conjointe de (X, Y) .
3. X et Y sont-elles indépendantes?
4. On considère maintenant que le nombre de lancers N suit une loi de Poisson de paramètre λ . Donner les lois de X et Y .

Exercice 70. (IMT 2025 Morgan) On tire successivement et indépendamment des boules dans une urne

On note X le rang d'apparition de la 2^e boule blanche

Y le rang d'apparition de la 2^e boule rouge

La probabilité d'avoir une boule blanche vaut $p \in]0, 1[$

et celle d'une boule rouge $q, q = 1 - p$.

1. Loi de X , fonction génératrice, en déduire l'espérance et la variance de X
2. Loi de Y .
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. Loi de $Z = \text{Min}(X, Y)$.

Exercice 71. Soient $\lambda > 0$ et X , une VAD telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \exp(\lambda(t - 1))$.
2. Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[, \forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Exercice 72. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Calculer :

1. $E(X - \lambda)$
2. $E(|X - \lambda|)$

10 Calcul différentiel

10.1 CCINP

Exercice 73. On a les ensembles $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \pi\}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < y < \pi\}$

On considère la fonction $F(x, y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leq x \leq y \leq \pi$ et $F(x, y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leq y \leq x \leq \pi$.

1. La fonction F admet-elle des extremums locaux sur T ?
2. La fonction admet-elle un minimum sur K ? Un maximum? Si oui, déterminer leur valeur

10.2 Mines-Télécom

Exercice 74. Trouver les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

en utilisant un passage en coordonnées polaires.

Exercice 75. 1. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0, 0)$.

Elles sont définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ respectivement par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}$$

2. Étude des dérivées partielles en $(0, 0)$

10.3 Mines-Ponts

On pose $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$.

1. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D} de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les dérivées partielles de f .

10.4 Centrale

Question de cours : Soit $f \in C^1$ sur \mathbb{R}^2 . On pose $g : t \mapsto f(2^t, \tan(t))$ où $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$. Sans rien écrire et sans rien dire ou expliquer, donner g' .

10.5 Ecole Navale

Exercice 76. Trouver les fonctions f de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve Faire le changement de variable $u = ax + by$ et $v = cx + dy$.

11 Analyse : Autres

11.1 CCINP/ Mines-Télécom

Exercice 77. Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

11.2 Mines-Ponts

Exercice 78. (Mines-Pont 2025 Mohamed)

Soient f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, $a \in \mathbb{R}$, et deux suites réelles $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$.

On pose $\Delta_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.

1. On suppose que $\forall n, x_n < a < y_n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n$.
2. On suppose $f \in C^1$ au voisinage de a . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n$.
3. Montrer en étudiant et prolongeant $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R} , que si f est seulement dérivable en a , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n$ peut ne pas exister.

Exercice 79. (Mines-Pont 2025) Dénombrer le nombre de parties A de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, i \in A$ ou $i+1 \in A$.

11.3 Centrale

Exercice 80. 1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Rappeler la définition de f est bornée sur Ω .
- (b) Rappeler la définition de f admet un maximum sur Ω .

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |s(z)|^2$.

- (a) φ est-elle bornée ?

On pose $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

- b) Montrer que φ est bornée sur D .
- c) Montrer que φ atteint son maximum sur D en exactement deux points.