classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Préparation à l'oral

Mai-Juin 2026

1 Algèbre linéaire sans réduction

Exercice 1. (CCINP sans préparation 2025 Morgan) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

1. Rappeler la définition de matrices semblables.
2. Montrer que si A est inversible alors AB est semblable à BA.
3. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 2. Soient $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) On note U l'application de E dans E définie pour tout $M \in E$ par $U(M) = P\,M$.
Montrer que U est un endomorphime de E.
2) Expliciter la matrice de U dans la base canonique de E.
3) Déterminer $\ker(U)$, $\mathrm{Im}(U)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}*$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner un supplémentaire, sa dimension et une équation dans la base .

Exercice 4. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose $f_i : x \mapsto e^{ix}$. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre.

2 Réduction

Exercice 5. (CCINP 2025 Cyril) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A est symétrique et $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$.

1. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Si P est un polynôme annulateur de A, que sait-on sur le spectre de A et l'ensemble des racines de A ?
3. Déterminer l'ensemble des matrices A vérifiant les hypothèses données.

Exercice 6. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2.
2. Trouver un polynôme annulateur de A.
3. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
4. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A.

Exercice 7. (CCINP 2025 Diane)
$M = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver le polynôme caractéristique
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres
3. Est-ce que M est diagonalisable ?
4. Trigonalisable ? La trigonaliser.
5. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -5x - 4y - 2z \\ y' = 3x + 5y \\ z' = 3x \end{cases}$$

Exercice 8. (CCINP sans préparation 2025 Mohamed)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P - P'$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. f est-il diagonalisable ?
3. f est-il bijectif ?
4. Déterminer l'antécédent de X^i par f pour $0 \leqslant i \leqslant 3$. En déduire f^{-1}.
5. Généraliser le résultat pour f endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.
2. Trouver les matrices D et P telles que $A = PDP^{-1}$. Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé.

On souhaite résoudre le système différentiel suivant (S) : $\begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = x + 3z \end{cases}$

3. On pose $U(t) = P^{-1}X(t)$. Trouver un système d'équations vérifié par $U(t)$ et effectuer la résolution de ce système.

On souhaite maintenant résoudre le système différentiel suivant (S') : $\begin{cases} x'' = -2x - 2y \\ y'' = 2x + 3y \\ z'' = x + 3z \end{cases}$

4. On pose $V(t) = P^{-1}X(t)$. Trouver un système d'équations vérifié par $V(t)$.
5. Montrer que l'ensemble des solutions bornées de (S') est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 10. Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = XX^T$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang et le spectre de A.
3. Calculer le polynôme caractéristique de A.
4. Montrer l'égalité $\det(I_n + A) = 1 + X^T X$.

Exercice 11. (IMT) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f + f^3 = 0$ et $f \neq 0$. On note A sa matrice associée dans la base canonique.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.
3. En déduire les valeurs propres réelles de f. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Algèbre euclidienne

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soit F l'espace d'équations $x+y+z+t=0$ et $x-y+z-t=0$.

1. Déterminer une base orthonormée de F et $F^\perp$.
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 13. (CCINP 2023,2024)

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. (2023 : On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique)

et f l'endomorphisme canoniquement associé à A

En 2024 : Déterminez une CNS sur (a,b,c) pour que A soit la matrice d'une rotation vectorielle.
En 2023 :

1. Montrez que f est une rotation ssi a,b,c vérifient 3 équations à déterminer.
2. Montrez que f est une rotation ssi a,b,c sont racines de $X^3-X^2+p=0$ avec $p \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.
3. Si $b=c\neq 0$, déterminez l'axe de rotation et la valeur de l'angle.

Exercice 14. (IMT 2025 Diane) $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une famille liée de vecteurs normés tels que $\langle e_i,e_j\rangle = \alpha, \alpha\in\mathbb{R}, \forall i, j\neq i$
$M = (\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j}$

1. Montrer que M est non inversible.
2. Calculer le déterminant de M et trouver α.

Exercice 15. (IMT 2025 Morgan) Soit f est une isométrie d'un espace euclidien de dim 3. telle que $P(x)=x^3-x^2+x-1$ est un polynôme annulateur de f.

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. En déduire que f est une rotation dont on donnera une matrice dans une base adaptée.

Exercice 16. Soient n un entier et $E=\mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0,\ldots,a_n$ des réels deux à deux distincts.
Montrer que $(P|Q)=\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 17. (CCINP 2021-2019)
On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifiez que $< f,g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)t^2\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Vérifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x$.
3. Calculez le projeté orthogonal de $x\mapsto x\ln x$ sur le sev des fonctions affines de E.
4. Calculez $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at+b-t\ln t)^2 t^2\,\mathrm{d}t$.

4 Séries numériques

Exercice 18. Nature des séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ suivantes :

1. $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln k}$.
2. $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{n^n}$.
3. $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^3}$.
4. $u_n = \dfrac{\ln n}{n-\ln n}$.
5. $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
6. Nature de la suite $(u_n)_n$ où $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ où $a>0$.

Exercice 19. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$,$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 20. (CCINP)

1. Énoncé du CSSA
2. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 21. Soient, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{\,n} x}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

1. Montrez (I_n) bien définie.
2. Calculez $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Nature des séries $\sum(-1)^n I_n$ et $\sum I_n$ (indication : montrez $\mathrm{ch}\,x \geq \mathrm{sh}\,x$ sur $\mathbb{R}^+$).
4. Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$?

Exercice 22. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$, on pose $I_n^k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,dt$ et $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$.

1. Montrez que I_n^k est bien définie.
2. Calculez I_n^k.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$?
4. Nature de $\sum a_n e^n$ et $\sum a_n(-e)^n$. Donnez le domaine de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
5. Montrez l'égalité $\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}\,dt$.

Exercice 23. (Mines-Télécom) On pose $u_n = n\ln\left(\dfrac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$, pour $n\geq 2$.

1. Etudiez la convergence de $\sum u_n$
2. Calculez la somme de cette série.

Exercice 24. (Mines-Télécom) Soit (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminez $\lim u_n$.
2. Déterminez la limite de (nu_n).
3. Nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$?

5 Suites et séries de fonctions

Exercice 25. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Donner $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous forme de somme de série.

Exercice 26. (CCINP 2024-2021-2019)
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Étudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.
2. Étudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$. [Avant 2024 : Montrez S continue sur $\mathbb{R}^+$.]
3. Avant 2024 Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Avant 2024 Calculez S

Exercice 27. (CCINP) On pose $F : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

1. Montrer que $]-1;1[\subset \mathcal{D}_F$.
2. Montrer que F est développable en série entière et exprimer ce développement.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $]0;1[$.
4. Déterminer F' sous une forme simple.
5. Trouver F' à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 28. (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0, +\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{12}$. On pourra utiliser librement que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 29. (IMT 2025 Diane) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x)\sin(nx)$.

1. Montrer que f est définie, 2π-périodique et exprimer $f(\pi - x)$ en fonction de $f(x)$.
2. Montrer que f est $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Exprimer $f'(x)$.

Exercice 30. (IMT) On désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur $]-1,1[$, soit :

$$\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

6 Intégration

Exercice 31. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{2}(1+\sin u)$.

Exercice 32. (CCINP 2025 Diane)Soit f continue, positive ou nulle .

1. Montrer que : $\int_\pi^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cv $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ cv.
2. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument .

Exercice 33. (CCINP 2025 Morgan) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}dx$.

1. Justifier que I_n est définie.
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{1/3}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(tn^{-1/3})}{1+t^3}dt$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} J_n = K$ où $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$.
   Est-ce que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ?
4. Montrer que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}dt$ par un changement de variable judicieux.
5. Montrer que $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}dt$ et calculer $2K$
6. ?

Exercice 34. On pose : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

1. Montrer que f est bien définie et $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$.
   Déterminer f'.
2. a) Montrer que :
$$\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
   b) Montrer que
$$\forall x > 0, f(x) = -e^{-x}\ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t}\ln t dt.$$
   c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 35.
1. Domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est C^1 , calculer f'.
3. En déduire f.

Exercice 36. (IMT) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{ch}(x\operatorname{sh}(t))\,\mathrm{d}t$ est définie , C^∞ sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et une solution développable en série entière de cette équation.

7 Équations différentielles

Exercice 37. Trouver les solutions développables en série entière de l'équation diff $2xy'' + y' - y = 0$ et en déduire les solutions de l'équa diff sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Exercice 38. (CCINP)

1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
2. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation :
$$t(t^2-1)y' + 2y = t^2$$

Exercice 39. (CCINP)
On définit $(E) : 5x''(t) + 10x'(t) + 6x(t) = 0$. Résoudre l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$.

Exercice 40. (Mines-Telecom) Déterminer les solutions sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle :$y'x\ln(x) = y(3\ln x + 1)$ puis par recollement les solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 41. Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y'' + xy' + 3y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

8 Espaces vectoriels normés et Topologie

Exercice 42. On munit $E = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}); f(0) = 0\}$ de la norme $\|.\|_\infty$.

1. Montrer que $N : f \mapsto \|3f + f'\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a :
$$f(x)e^{3x} = \int_0^x (3f(t) + f'(t))e^{3t}\,\mathrm{d}t$$
3. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\|f\|_\infty \leq kN(f)$.
4. Montrer que N et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

9 Probabilités

9.1 CCINP

Exercice 43. On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. En admettant la formule de Vandermonde :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \forall n \leqslant a+b \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$
déterminer l'espérance de X.
3. Démontrer la formule de Vandermonde.

Exercice 44. (CCINP Cyril 2025)

Soient $\lambda > 0$ et X, une VAD telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et Y une VAD telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{/(X=n)}$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. Donner la loi de Y
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Donner la loi de $Z = X - Y$.

9.2 Mines-Télécom

Exercice 45. (IMT 2025 Cyril) Soit un dé à 3 faces. On lance n fois le dé et on note X (resp : Y) la v.a comptant le nombre de 1(resp 2). Les lancers sont supposés indépendants. Soit p (resp : q) la proba d'obtenir 1 (resp : 2)

1. Donner les lois de X et Y
2. Donner la loi conjointe de (X,Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On considère maintenant que le nombre de lancers N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner les lois de X et Y.

Exercice 46. (IMT 2025 Morgan) On tire successivement et indépendamment des boules dans une urne
On note X le rang d'apparition de la 2^{e} boule blanche
Y le rang d'apparition de la 2^{e} boule rouge
La probabilité d'avoir une boule blanche vaut $p \in]0,1[$
et celle d'une boule rouge $q, q = 1 - p$.

1. Loi de X, fonction génératrice, en déduire l'espérance et la variance de X
2. Loi de Y.
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. Loi de $Z = \mathrm{Min}(X,Y)$.

Exercice 47. Soient $\lambda > 0$ et X, une VAD telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \exp(\lambda(t-1))$.
2. Montrer que $\forall t \in [1,+\infty[, \forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

10 Calcul différentiel

10.1 CCINP

Exercice 48. On a les ensembles $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ et $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 < x < y < \pi\}$

On considère la fonction $F(x, y) = x(\pi - y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$ et $F(x, y) = y(\pi - x)$ pour $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$.

1. La fonction F admet-elle des extremums locaux sur T ?
2. La fonction admet-elle un minimum sur K ? Un maximum ? Si oui, déterminer leur valeur

10.2 Mines-Télécom

Exercice 49. Trouver les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

en utilisant un passage en coordonnées polaires.

Exercice 50.
1. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0, 0)$.
   Elles sont définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ respectivement par :

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\ ,\ g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}\ ,\ h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}$$

2. Étude des dérivées partielles en $(0, 0)$

10.3 Centrale

Question de cours : Soit f C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g : t \mapsto f(2^t, \tan(t))$ où $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$. Sans rien écrire et sans rien dire ou expliquer, donner g'.

10.4 Ecole Navale

Exercice 51. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve Faire le changement de variable $u = ax + by$ et $v = cx + dy$.

11 Analyse : Autres

Exercice 52. CCINP/ Mines-Télécom Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.