PSI **Décembre 2021**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Polynômes d'endomorphismes et polynômes matriciels

Exercice 1. : Dans chacun des cas suivants, trouver un polynôme annulateur et en déduire l'inverse et les puissances de la matrice :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $t \in \mathbb{C}$. On donne : $B = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ \frac{1}{t} & 0 & t \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (Oral CCINP)

1. Montrer que Φ défini par $\Phi(M) = M + tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on donnera le noyau et le rang.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.
3. Φ est-il bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.

Exercice 3. : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A^8 + A^2 + I_3 \neq 0$.

Exercice 4. : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$ et $Tr(A) = 9$.
Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 5. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $P = (X+3)(X^2+X+1)$ est annulateur de A. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier strictement négatif

Exercice 6. On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2.
2. Donner un polynôme annulateur de J.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On pose : $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & (b) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (b) & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.
   Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
4. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. Calculer $A^p, p \in \mathbb{N}$

Exercice 7. : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A. Déterminer les puissances de A.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
4. Expliciter l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
5. Montrer que $\mathcal{P} = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 9. : On considère l'endomorphisme

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $f^n, n \in \mathbb{Z}$.
4. $\mathcal{P} = \{P(f)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 10. : Oral CCINP.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ polynôme annulateur d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-e.v. On suppose $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 11. : Oral Mines.

Montrer que, si A et B sont réelles, carrées d'ordre n, et telles qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, vérifiant $P(0) = 1$ et $P(A) = AB$, alors A est inversible et commute avec B.