PSI **Novembre 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Polynômes d'endomorphismes et polynômes matriciels

Exercice 1. : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de A non nul et de degré inférieur ou égal à 1.
2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A.
3. En déduire tous les polynômes annulateurs de A
4. Pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des coefficients a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n I_3$ et les déterminer en fonction de n.
5. Montrer que A est inversible et Déterminer A^{-1} en fonction de A.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des coefficients c_n et d_n tels que : $(A^{-1})^n = c_n A + d_n I_3$ et les déterminer en fonction de n.
7. On définit $\mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 2. (Oral CCINP)

1. Montrer que Φ défini par $\Phi(M) = M + tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on donnera le noyau et le rang.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.
3. Φ est-il bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.

Exercice 3. (Oral CCINP)

1. Montrer que u défini par $u(M) = \frac{1}{3}(2M - {}^tM)$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont on donnera la trace et le déterminant
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de u.
3. u est-il bijectif ? Si oui, calculer u^{-1}.

Exercice 4. : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A a au moins une racine réelle.
2. Montrer que $A^8 + A^2 + I_3 \neq 0$.

Exercice 5. : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$ et $Tr(A) = 9$.
Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 6. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $P = (X-1)(X^2+X+2)$ est annulateur de A. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier strictement négatif et que son déterminant vaut 1.

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 et $n \geq 2$.

1. Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$.
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. Calculer $A^p, p \in \mathbb{N}$.
4. On définit $\mathbb{R}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 8. : (Oral Ecole Navale)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v , (f,u,v) trois endomorphismes de E , (λ,μ) deux scalaires tels que :

$$f = \lambda u + \mu v, f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

1. Donner un polynôme annulateur de f.
2. Que peut-on dire sur le spectre de f ?