PSI **Mars 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces Préhilbertiens réels et Espaces euclidiens

Exercice 1. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ et étudier le cas de l'égalité.

Exercice 2. Montrer que :

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_i}{x_j} / (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \right\}$ admet une borne inférieure m que l'on déterminera.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
1. Donner une b.o.n de D.
2. Déterminer une b.o.n de $D^\perp$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur la droite (D).

Exercice 5. On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i : x \longmapsto x^i$ et $F = \mathrm{vect}(P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) n'est pas une b.o.n de F.
2. Déterminer une b.o.n de F.
3. Donner $F^\perp$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 6. (Mines Ponts) Soit E un espace préhilbertien réel et $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.

On suppose que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} | < e_k, x > |^2$.

Montrer que B est une base orthonormale de E.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $<,>: E^2 \to \mathbb{R}, (A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$.

1. Vérifier que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
2. Exprimer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $S_3(\mathbb{R})$.
3. Soit H l'espace des matrices de trace nulle. Montrer que H est un sev de E et donner sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1

Exercice 8. Déterminer $\lambda = \operatorname*{Inf}\limits_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x}\,dx$

Exercice 9. Continuité du problème d'algèbre du concours blanc CCINP 2018 PC Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\| \cdot \|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Etablir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

2. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *On pourra utiliser le fait que L_n est vecteur propre de ϕ_n.*
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, L_n \rangle = 0$.
4. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2, \text{ où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle.$$

2. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.