

1 Produit scalaire et Norme associée

Exercice 1. Connaître les produits scalaires classiques et Savoir justifier que ce sont des produits scalaires : Dans chaque cas, donner la définition du produit scalaire et justifier que cela en est un.

1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
2. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Produit scalaire canonique sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 2. extrait du sujet e3A 2020 PC.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 3. extrait du sujet CCINP 2024 PC et Centrale 2024 PSI.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2, \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est convergente.
2. Montrer que : $\langle, \rangle : (P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 4. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que : $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$ et étudier le cas de l'égalité.

Exercice 5. Montrer que :

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i}{x_j} / (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \right\}$ admet une borne inférieure m que l'on déterminera.

Exercice 7. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AM) = 0$. En utilisant le produit scalaire usuel de E , justifier rapidement que $A = 0$.

2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr} A \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr} A^T A}$ et étudier le cas de l'égalité.

2 Orthogonalité, Bases orthonormales d'un espace euclidien, Supplémentaires orthogonaux, Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

1. Donner une b.o.n de D .
2. Déterminer une b.o.n de $D^\perp$.

Exercice 9. Partie du sujet e3A 2020 PC.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$.

Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 10. On munit $C([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i : x \mapsto x^i$ et $F = \text{vect}(P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) n'est pas une b.o.n de F .
2. Déterminer une b.o.n de F .
3. Donner $F^\perp$.

Exercice 11. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle, \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$.

1. Déterminer l'orthogonal de G le sous-espace $\text{vect}(I_n)$.
2. Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les ensembles respectifs des matrices symétriques puis antisymétriques. Vérifier que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Exercice 12. (Mines Ponts) Soit E un espace préhilbertien réel et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E .

On suppose que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle e_k, x \rangle|^2$.

Montrer que B est une base orthonormale de E .

3 Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie, Distance d'un vecteur à un s.e.v

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur la droite (D) .

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2, \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est convergente.
2. Montrer que $\langle, \rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ définit un produit scalaire sur E .
3. Déterminer $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.

Exercice 15. Partie du sujet e3A 2020 PC.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$

1. Déterminer la distance du polynôme $X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$:
 - (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E : Quelle est sa dimension ?
 - (b) Soit φ la projection orthogonale sur H : Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E

Exercice 16. On munit $C([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i : x \mapsto x^i$ et $F = \text{vect}(P_0, P_1, P_2)$.

Déterminer le projeté orthogonal de P_3 sur F et la distance de P_3 à F .

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle, \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$.

1. Soit G le sous-espace $\text{vect}(I_n)$. Déterminer la projection orthogonal de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur G , puis sur $G^\perp$.
2. Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les ensembles respectifs des matrices symétriques puis antisymétriques.

(a) Exprimer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $S_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit H l'espace des matrices de trace nulle. Montrer que H est un sev de E et donner sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1

Exercice 18. Exemples sur les distances à savoir refaire :

1. Soit $D = \text{vect}(a)$ où $a \neq 0$ une droite vectorielle de E euclidien. Pour $x \in E$, Calculer $d(x, D)$, $d(x, D^\perp)$.
2. Soit H un hyperplan de E préhilbertien réel. . Pour $x \in E$, Calculer $d(x, H)$, $d(x, H^\perp)$.

3. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 (\ln x - ax - b)^2 dx$.

Exercice 19. Déterminer $\lambda = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$

4 Formes linéaires sur un espace euclidien

Exercice 20. 1. Enoncé et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

2. Applications :

(a) Définition du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique dont la base canonique est notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

i. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^3$, que l'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)Q(t) dt = P(0)$$

Montrer que Q est de degré n .

(c) Montrer que pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$. En déduire que tout noyau d'une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

5 Des extraits d'écrits

Exercice 21. Partie d'un sujet CCINP 2010 PSI

Dans cette partie, on considère $n + 1$ nombres réels, deux à deux distincts, notés $x_0, x_1, \dots, x_n$ et on définit la forme bilinéaire B sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\forall f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), B(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i)$$

Pour $k \in [0, n]$, on définit $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ par $L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$.

I.1. Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1. Justifier rapidement l'affirmation : B définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2. Pour $j, k \in [0, n]$, calculer $L_k(x_j)$. Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire B .

I.2. Définition de $P_n(f)$.

A toute fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe le polynôme $P_n(f)$ défini par

$$P_n(f) = \sum_{i=0}^n B(f, L_i) L_i$$

2.1. Pour tout $k \in [0, n]$, exprimer $B(f, L_k)$ en fonction de $f(x_k)$. En déduire que $P_n(f)$ vérifie $P_n(f)(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [0, n]$.

2.2. Montrer que $P_n(f)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [0, n]$.

2.3. Expliciter $P_n(f)$ lorsque $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Préciser le polynôme $\sum_{k=0}^n L_k(X)$ et, pour x réel, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n L_k(x)$.

Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dira que $P_n(f)$ est le polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n , de la fonction f aux points x_i , pour $i \in [0, n]$.

Exercice 22. Partie d'un sujet Centrale 2021 PC

Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \left((X^{i-1}|X^{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}.$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

Définition et propriétés d'un système orthogonal :

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n .

1. Dans toute cette partie, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.
- (c) Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = V_n$.

2. **Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \left((V_{i-1}|V_{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (a) Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.
- (b) Montrer que $Q_n^T G'_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n .
- (c) En déduire que $\det G_n = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$.