Espaces Préhilbertiens Réels et Espaces Euclidiens

L'essentiel à retenir

1. Produit scalaire et Norme associée

1.1 Définition et conséquences

Définition 1 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On appelle *produit scalaire sur* E, toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $<,>$, $(/)$ ou . telle que :

- $\forall (x,y) \in E \times E, <x,y>=<y,x>$. On dit que $<,>$ est symétrique.
- $\forall x \in E, y \longmapsto <x,y>$ est linéaire.On dit que $<,>$ est linéaire à droite.
- $\forall y \in E, x \longmapsto <x,y>$ est linéaire. On dit que $<,>$ est linéaire à gauche.
- $\forall x \in E, <x,x> \geq 0$. On dit que $<,>$ est positive.
- $\forall x \in E, <x,x>=0 \Longleftrightarrow x=0$. On dit que $<,>$ est définie.

On appelle *espace préhilbertien réel*, tout $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire φ et $\varphi(x,y)$ est plutôt noté $<x,y>$ ou (x/y).

On appelle *espace euclidien*, tout $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie muni d'un produit scalaire

Remarque 1 Si E est un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $<,>$ et F un s.e.v de E, la restriction de $<,>$ sur $F \times F$ est un produit scalaire sur F et F est lui-même un espace préhilbertien réel.

Propriété 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, <>)$ un espace préhilbertien réel, $\forall (x,y) \in E \times E, |<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$.

Théorème 1 : Soit $(E, <>)$ un espace préhilbertien réel.

$x \longmapsto \sqrt{<x,x>}$ est une norme sur E. On l'appelle *norme associée au produit scalaire de E ou norme euclidienne* et on la note $\|\cdot\|$.

Corollaire : Tout espace préhilbertien réel est un e.v.n.

Remarque 2 : L'inégalité de Cauchy Schwarz devient donc : $\forall (x,y) \in E \times E, |<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$

Définition 2 : Un vecteur x d'un espace préhilbertien est appelé, *vecteur normal ou unitaire*, lorsque $\|x\|=1$.

Remarque 3 : Lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire.

Théorème 1 : On retiendra les relations suivantes :

1. $\forall (x,y) \in E \times E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2<x,y>$.
2. Identité du parallélogramme :
$$\forall (x,y) \in E \times E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
3. Identités de Polarisation : $\forall (x,y) \in E \times E$,
$$\begin{aligned} <x,y> &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}$$

Remarque 4 : Lorsqu'on nous demande de montrer qu'une application est une norme et qu'il semble difficile de montrer l'inégalité triangulaire, il est souvent possible de montrer qu'elle est associée à un produit scalaire : il suffit de montrer que la forme qui lui est associée est un produit scalaire.

1.2 Exemples Classiques :

1.2.1 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle, produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire :

$$<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto {}^t XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ce qui donne la norme euclidienne : $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

1.2.2 Produit scalaire canonique sur un espace de dimension finie Soit E un espace de dimension finie n, soit $b=(e_i)_i$ une base.

Alors, on définit de manière analogue à celui de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire sur E : $<,>: E \times E \to \mathbb{R}, (x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ En particulier :

1. Pour $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, <P,Q> = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \text{ où } P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$$

2. Pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique composée des matrices élémentaires

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, < A,B >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \text{ où } A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$$

   Remarquons que : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right) = \text{tr}\left({}^t AB\right)$.
   Il faut savoir démontrer directement que $<,>: (A,B) \mapsto \text{tr}\ ({}^t AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sans passer par la notion de produit scalaire canonique.

1.2.3 Produit scalaire canonique sur l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$, $p \in C([a,b],\mathbb{R})$ avec $\forall t \in [a,b], p(t) > 0$. (cas courant $\forall t \in [a,b], p(t) = 1$)

Alors $<>: (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)p(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

1.2.4 Norme de la convergence en moyenne quadratique

Définition 3 : Soit f **continue** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
f est dite **de carré intégrable sur** I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I.

On note $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

$<,>: (f,g) \longmapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$.

L'application $N_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_I f^2}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$. Elle est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

2. Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v préhilbertien de produit scalaire $<,>$.

Définition 4 :

1. Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $< x,y >= 0$.
2. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite
   (a) orthogonale si $\forall (i,j) \in I\times I, i\neq j \Longrightarrow < u_i,u_j >= 0$.
   (b) orthonormale ou orthonormée si $\forall (i,j) \in I\times I, i\neq j \Longrightarrow < u_i,u_j >= 0$ et $< u_i,u_i >= 1$.
3. Soit F un s.e.v de E.
   (a) Soit $x\in E$. On dit que x *est orthogonal à* F si : $\forall y \in F, < x,y >= 0$.
   (b) On appelle *orthogonal de* F, qu'on note $F^\perp$, la partie de E :
   $$F^\perp = \{x\in E / \forall y \in F, < x,y >= 0\}$$
4. Soit F et G deux s.e.v de E.
   F et G sont dits s.e.v orthogonaux lorsque :
   $$\forall (x,y) \in F\times G, < x,y >= 0$$
   et on note $F \perp G$

Propriété 2 :

1. Soit F un s.e.v de E. $F^\perp$ est un s.e.v de E et $F\cap F^\perp = \{0\}$ (i.e $F+F^\perp$ est une somme directe).
2. Soit F un s.e.v de E de dimension finie, muni d'une base $(f_i)_{i\in\{1..p\}}$.
   Alors
   $$F^\perp = \{x\in E/\forall i \in \{1..p\}, < x,f_i >= 0\}$$
3. Soit F et G deux s.e.v de E.
   F et G sont orthogonaux ssi $F\subset G^\perp$.
   F et G sont orthogonaux ssi $G\subset F^\perp$.
4. $F\subset (F^\perp)^\perp$.

Théorème de Pythagore :

Soit E est un préhilbertien réel,

1. $\forall (x,y) \in E \times E, < x, y >= 0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
2. Soit une famille finie orthogonale $(x_i)_{i\in\{1..n\}}$ de E.
   Alors
$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

3. Bases orthonormales d'un espace euclidien

Propriété 3 : Toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre. **Corollaire** : Soit E un espace euclidien de dimension n.

Toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i\in\{1..n\}}$ de vecteurs non nuls de E est une base de E. **Définition 5** : Soit E un espace euclidien de dimension n.

On appelle *base orthogonale* (resp : *base orthonormale*) de E, toute famille orthogonale (resp : orthonormale) de n vecteurs non nuls de E.

On note b.o.n pour une base orthonormale.

Propriété 4 : Soit E muni d'une b.o.n $(e_i)_{i\in\{1..n\}}$. On a :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i$$

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

où $x_i =< e_i, x >$.

$$\forall (x,y) \in E \times E, < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

où $x_i =< e_i, x >$ et $y_i =< e_i, y >$.

4. Supplémentaires orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien réel.

Définition 6 : Soit F un s.e.v de E.

Lorsque $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de F dans E.

Propriété 5 : Soit E un espace euclidien.

Pour tout sev F de E, on a : $E = F \oplus F^\perp$

Corollaire 1 : Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

Corollaire 2 : Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit F un *sev de dimension finie*, alors $E = F \oplus F^\perp$.

5. Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie

Définition 7 : Soit F un *sev de dimension finie* d'un espace préhilbertien réel E.

Le projecteur $p : E \to E$ tel que $\ker p = F^\perp$ et $\mathrm{Im} p = F$ est appelé *projecteur orthogonal sur* F, noté p_F *On rapelle que :*

- $\forall x \in E, p_F(x) \in F,\ (x - p_F(x)) \in F^\perp$
- $\forall x \in E, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$
- $\mathrm{Im} p = F = \{x / p_F(x) = x\}$
- $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$

Propriété 6 : Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit F un *sev de dimension finie*, muni d'une b.o.n $(f_i)_{i\in\{1..p\}}$.

Alors $\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < f_i, x > f_i$

Remarque 5 : Avec cette propriété, nous retiendrons DEUX METHODES pour déterminer $p_F(x)$ suivant les informations que nous avons sur F :

- Ou bien : on a (ou il est facile d'obtenir) une b.o.n de F : alors on applique la propriété précédente.
- Ou bien : on dispose d'une base **quelconque** $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ de F, alors pour déterminer $p_F(x)$, on résoudra un système linéaire en posant :
  $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$ et $(a_i)_i$ correspondent aux inconnues à déterminer. Ceci vient du fait que $p_F(x) \in F$.
  Puis on traduit que $x - p_F(x) \in F^\perp$ en écrivant les équations : $\forall j \in [\![1, p]\!], < x - p_F(x), f_j >= 0$. Ceci s'écrit en un système à p inconnues et p équations.

Propriété 7 : Inégalité de Bessel

Soit F un *sev de dimension finie* d'un espace préhilbertien réel E, muni d'une b.o.n $(f_i)_{i\in\{1..p\}}$. Alors,$\forall x\in E, \|p_F(x)\|\leq \|x\|$

C'est-à-dire encore, $\forall x\in E, \sum\limits_{i=1}^{p} |<f_i,x>|^2 \leq \|x\|^2$

6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3 Soit E un préhilbertien réel.

Pour toute famille finie libre $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, il existe une famille orthogonale (donc libre aussi) $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $\forall i\in\{1..n\}, \text{vect}(x_1,...,x_i)=\text{vect}(y_1,...,y_i)$.

En pratique, on cherche y_n de la forme :

$$y_n = x_n - p_{H_{n-1}}(x_n)$$

Or $H_{n-1}=\text{vect}(x_1,...,x_{n-1})=\text{vect}(y_1,...,y_{n-1})$ donc $p_{H_{n-1}}(x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i y_i$ où les λ_i sont des scalaires qu'on détermine en écrivant : $<y_n,y_j>=0$ pour tout $j=1...n-1$.

C'est-à-dire :

$y_1=x_1$

$y_2=x_2+\lambda_1 y_1$ où λ_1 est telle que : $<y_2,y_1>=0$.

$y_3=x_3+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ où λ_1 est telle que : $<y_3,y_1>=0$ et où λ_2 est telle que : $<y_3,y_2>=0$.

etc.....

Corollaire : Procéde d'orthonormalisation de Gram-Scmidt

Pour toute famille finie libre $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, il existe une famille orthonormale (donc libre aussi) $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $\forall i\in\{1..n\}, \text{vect}(x_1,...,x_i)=\text{vect}(y_1,...,y_i)$.

En pratique : On part d'une famille finie libre $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

1. Le premier vecteur de ma future b.o.n est :$y_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$
2. On cherche le second vecteur en deux étapes :
   (a) On cherche un vecteur y_2' sous la forme $y_2'=x_2+\lambda_1 y_1$ où λ_1 est telle que : $<y_2',y_1>=0$, ce qui donne une seule valeur possible pour λ_1.
   (b) On normalise le vecteur obtenu et ce vecteur devient le second vecteur de ma future bon : $y_2=\dfrac{y_2'}{\|y_2'\|}$
3. On cherche le troisième vecteur en deux étapes :
   (a) On cherche un vecteur y_3' sous la forme $y_3'=x_3+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ où λ_1 est telle que : $<y_3,y_1>=0$ et où λ_2 est telle que : $<y_3,y_2>=0$ ce qui donne les valeurs de λ_i.
   (b) On normalise le vecteur obtenu et ce vecteur devient le troisième vecteur de ma future bon : $y_3=\dfrac{y_3'}{\|y_3'\|}$

etc.....

7. Distance d'un vecteur à un s.e.v

Définition 8 : Soit E un préhilbertien réel.

Soient $x\in E$ et F un s.e.v

On appelle, *distance de x à F*, noté $d(x,F)$, le réel positif défini par : $d(x,F)=\text{Inf}\{\|x-y\|/y\in F\}$

Propriété 8 :

1. L'ensemble $\{y\in F/d(x,F)=\|x-y\|\}$ a au plus un élément.

2. Soit $x_0\in F$

$$d(x,F)=\|x-x_0\| \Longleftrightarrow x-x_0\in F^{\perp}$$

3. Si F est *de dimension finie*, $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$ et $(d(x,F))^2=\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$.

Exemples à savoir refaire :

1. Soit $D=\text{vect}(a)$ où $a\neq 0$ une droite vectorielle de E euclidien. Pour $x\in E$, Calculer $d(x,D)$, $d(x,D^{\perp})$.

2. Soit H un hyperplan de E préhilbertien réel. . Pour $x\in E$, Calculer $d(x,H)$, $d(x,H^{\perp})$.

3. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x-ax-b)^2\,dx$.

8. Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème de représentation des formes linéaires : Soit f une forme linéaire sur un espace euclidien E muni du produit scalaire $<,>$. Alors, il existe un unique vecteur $a\in E$ tel que :

$$\forall x\in E, f(x)=<a,x>$$

Autrement dit, en dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire.

Remarque 6 : Soit f une forme linéaire non nulle, l'unique vecteur a tel que $\forall x\in E, f(x)=<a,x>$ est orthogonal à l'hyperplan $H=\ker(f)$ puisque $\forall x\in H, <x,a>=0$. Plus généralement, les vecteurs colinéaires à a sont les vecteurs orthogonaux de H. On dit aussi **vecteurs normaux** de H.