PSI **Février 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire l'anticommutant de A c'est-à-dire $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AM + MA = 0\}$.

Exercice 2.
1. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A.
2. Montrer que si M commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable
2. Calcul de A^n.
3. Donner la matrice de u dans la base $e_2, (u - Id)(e_2), (u - Id)^2(e_2)$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Étudier la diagonalisabilité de A et B.
2. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 5. Trois enfants A, B, C jouent à la balle :
- A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités que A, B ou C ait la balle à la n ième étape.

1. Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
2. Trouver une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la limite de (a_n, b_n, c_n) quand $n \to +\infty$ et montrer que cette limite est indépendante des conditions initiales.

Exercice 6. (EIVP-ENTPE 2015)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$ alors n est pair et $\operatorname{tr}(A)$ est un entier négatif.

Exercice 7. Soit A une matrice donnée non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme défini par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), u(M) = \operatorname{tr}(A)\, M - \operatorname{tr}(M)\, A$$

u est-il diagonalisable sur $\mathbb{K}$?

Exercice 8. 1. Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2 ?

2. Montrer que $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_2(\mathbb{R})$.
4. Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 9. Soit $C \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont notés $(c_1, \cdots, c_n)$ et $M = C{}^tC$.

1. Déterminer le rang de M.
2. Donner le polynôme caractéristique de M.
3. A quelle condition sur $(c_1, \cdots, c_n)$ M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I = 0$.
Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2 et de trace nulle, telle que $A^n \neq 0$. On note u l'endo associé à A. Montrer que A est diagonalisable et déterminer un polynôme annulateur de degré 3.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(I_n + N) = 1$.

Exercice 13. 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B}$ et soit H l'hyperplan d'équation : $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans $\mathcal{B}$.
Montrer que H est stable par u si et seulement si ${}^t(a_1, \cdots, a_n)$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Déterminer les valeurs propres de f^2 en fonction de celles de f.
2. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$ et que f^2 est diagonalisable.
3. Montrer la réciproque de la question précédente.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables tels que $v \circ u = u \circ v$.

1. Montrer que v induit un endomorphisme diagonalisable sur chacun des espaces propres de u.
2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
   (a) Montrer que $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto u \circ f$ et $\Psi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto f \circ u$ sont diagonalisables.
   (b) En utilisant 2, montrer que $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), f \mapsto u \circ f - f \circ u$ est diagonalisable.

Exercice 16. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n.
On suppose que : $\forall k \in [1; n], \operatorname{tr}(u^k) = 0$.
Montrer que $u = 0$.

Exercice 17. (Centrale) Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
2. En déduire une CNS sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Exercice 18. Donner le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} + 2u_{n+1} - 2u_n$.