PSI **Décembre 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. *Pour vous entraîner en calcul* Parmi ces matrices, quelles sont celles qui sont diagonalisables. Si oui, la diagonaliser.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_1}(X) = (X-1)^3,\ E_1(A_1) = Vect((1,-2,1)$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_2}(X) = X(X-1)(X-2),\ E_0(A_2) = Vect((1,-1,1)), E_1(A_2) = Vect((0,1,0)), E_2(A_2) = Vect((-1,1,1))$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_3}(X) = (X-4)(X-1)^2,\ E_1(A_3) = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)), E_4(A_3) = Vect((1,1,1),$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_4}(X) = (X-1)(X-2)^2,\ E_1(A_4) = Vect((4,-4,1)),\ E_2(A_4) = Vect((2,-3,1))$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_5}(X) = (X+1)(X-1)^2,\ E_{-1}(A_5) = Vect(1/2*a,-1,1),\ E_{-1}(A_5) = Vect((1,0,0))$.

Exercice 2. (CCINP PSI 2021) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle inversible ?

Exercice 3.

1. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Diagonaliser p.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 et $n \geq 2$.

1. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 5. (CCINP 2023) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie la relation :$A^3 + 9A = 0$

1. Montrer que le spectre de est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?
3. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Montrer que si n est impair, A n'est pas inversible.
5. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation
6. Montrer que la trace de A est nulle et que son déterminant est soit nul, soit 1.

Exercice 6. (CCINP 2023)
Soient a et b deux réels non nuls, et n un entier supérieur ou égal à 2
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $u(M) = aM + b^tM$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$
2. Trouver un polynôme annulateur de u de degré 2 sans passer par une matrice de u.
3. En déduire que u est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.
4. Déterminer la trace et le déterminant de u

Exercice 7. (CCINP 2019) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. On revient au cas général. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B est aussi diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?
3. Étudier la réciproque

Exercice 8. (CCINP 2021)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrez A semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouvez cette expression en observant que $A = I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 9. (CCINP 2021) Soit $n \geqslant 3$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \geqslant j \geqslant n$ et $a_{i1} = i$ pour $1 \geqslant i \geqslant n$ et des 0 ailleurs.

1. Quel est le rang de A ? $\dim \operatorname{Ker} A$?
2. A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?
3. Montrez que $\mathrm{Sp}A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.
4. Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

Exercice 10. (CCINP 2023)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée et $f : M \mapsto AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A^2 = A$ alors f est un projecteur.
3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
4. Exprimer un vecteur propre de f en fonction d'un vecteur propre de A .
5. Montrer que f et A et ont même spectre.

Exercice 11. (CCINP 2021)
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. telle que $M^4 = 4M^2$ et 2 et-2 sont valeurs propres de M.

1. On suppose M non inversible. Montrez $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2, -2\}$.
2. Montrez M diagonalisable.

Exercice 12. (IMT-CCMP 2021) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $\Psi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}\,(A)M + \mathrm{tr}\,(M)A$.

1. Ψ est-il diagonalisable ?
2. Donner le polynôme caractéristique et la trace de Ψ.

Exercice 13. (EIVP-ENTPE 2015)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $A^2 + A + I_n = 0$ alors n est pair et si $A^3 + A^2 + A = 0$ alors rg(A) est pair.

Exercice 14. (IMT 2021) Soient E un $\mathbb{C}-$e.v de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ tq : $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

1. Donner une base de l'image et du noyau de f_a.
2. Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
3. Déterminer A^2. Qu'en déduire ?
4. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? bijectif ?

Exercice 15. (Mines-Télécom 2023)

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$
3. Résoudre l'équation
$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Exercice 16. (Mines-Télécom 2023)

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$
3. Résoudre l'équation
$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Exercice 17. (Mines) Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables et qui commutent . Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonales.

Exercice 18. Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(I_n + N) = 1$

Exercice 19. (Mines 2019) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -6 & 7 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p = af + bId_{\mathbb{R}^3}$ soit un projecteur sur une droite que l'on précisera.
3. La famille (A^2, A, I_3) est-elle libre ?

Exercice 20. (Centrale 2023) Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension n et u un endomorphisme de E

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)$ soit une base de E.
   Montrer que $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1})$ est libre.
   Que peut-on dire de $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1}, u^n)$?
2. On suppose désormais que u est diagonalisable et $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1})$ libre.
   Montrer qu'il existe tel que : $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)$ soit une base de E soit libre.

Exercice 21. (Centrale PSI 2021)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle quetr $A = 0$ et $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. Montrez A diagonalisable.
2. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{tr} A^k = 0$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$ et $\operatorname{tr} A^n \neq 0$. Montrez A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \cdots, n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

Exercice 22. (Centrale 2023) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ possédant p ($p \geq 2$) valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$.
On suppose que : $(\star), \forall i \in [\![2, p]\!], |\lambda_i| < |\lambda_1|$

1. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que $\operatorname{tr}(A^k) \neq 0$, $t_k = \frac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)}$.
   Montrer que $(t_k)_k$ est définie à partir d'un certain rang, qu'elle converge et déterminer sa limite.
2. Justifier que si l'hypothèse $(\star)$ n'est pas vérifiée, le résultat précédent peut être faux.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Déterminer la limite de $\frac{A^k}{k}$ quand $k \to +\infty$