classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Feuille d'exercices** $n°7$
Novembre 2025 **Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée**

Exercice 1. *Pour vous entraîner en calcul* Parmi ces matrices, quelles sont celles qui sont diagonalisables. Si oui, la diagonaliser.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_1}(X) = (X-1)^3$, $E_1(A_1) = Vect((1,-2,1)$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_2}(X) = X(X-1)(X-2)$, $E_0(A_2) = Vect((1,-1,1))$, $E_1(A_2) = Vect((0,1,0))$, $E_2(A_2) = Vect((-1,1,1))$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_3}(X) = (X-4)(X-1)^2$, $E_1(A_3) = Vect((-1,1,0),(-1,0,1))$, $E_4(A_3) = Vect((1,1,1),$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_4}(X) = (X-1)(X-2)^2$, $E_1(A_4) = Vect((4,-4,1))$, $E_2(A_4) = Vect((2,-3,1))$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_5}(X) = (X+1)(X-1)^2$, $E_{-1}(A_5) = Vect(1/2*a,-1,1)$, $E_{-1}(A_5) = Vect((1,0,0))$.

Exercice 2. (CCINP PSI 2021) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle inversible ?

Exercice 3.

1. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Diagonaliser p.

Exercice 4. (CCINP 24 sans préparation) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P a n racines distinctes. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 et $n \geq 2$.

1. Montrer que $A^2 = \text{tr}\,(A)A$.
2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 6. (CCINP 2023)
Soient a et b deux réels non nuls, et n un entier supérieur ou égal à 2
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $u(M) = aM + b^tM$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$
2. Trouver un polynôme annulateur de u de degré 2 sans passer par une matrice de u.
3. En déduire que u est diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.
4. Déterminer la trace et le déterminant de u

Exercice 7. (CCINP 24) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où α, β, γ tels que : $\alpha + \beta = \gamma, \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \neq -\gamma$.

1. Montrer que A est diagonalisable .
2. (a) Déterminer χ_C en fonction de χ_A et en déduire le spectre de C.
   (b) Déterminer χ_B en fonction de χ_A et en déduire le spectre de B.
3. Montrer que si $X \in \operatorname{Ker} A$, alors $\binom{X}{0} \in \operatorname{Ker} B$
4. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(B)) \geq 2\dim(\operatorname{Ker}(A))$.
5. Diagonaliser B dans le cas où $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 2$.

Exercice 8. (CCINP 2019) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. On revient au cas général. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B est aussi diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?
3. Étudier la réciproque

Exercice 9. (CCINP 2021) Soit $n \geqslant 3$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \geqslant j \geqslant n$ et $a_{i1} = i$ pour $1 \geqslant i \geqslant n$ et des 0 ailleurs.

1. Quel est le rang de A ? $\dim \operatorname{Ker} A$?
2. A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?
3. Montrez que $\operatorname{Sp} A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.
4. Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

Exercice 10. (IMT 24) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$. On suppose u non nul.

1. Soit A la matrice associé à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace de A et en déduire $\dim(\operatorname{Ker} u)$
2. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}\left(u^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

Exercice 11. (CCINP 2023) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie la relation :$A^3 + 9A = 0$

1. Montrer que le spectre de est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?
3. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Montrer que si n est impair, A n'est pas inversible.
5. Montrer que si A est une matrice symétrique réelle non nulle, alors elle ne vérifie pas la relation
6. Montrer que la trace de A est nulle et que son déterminant est soit nul, soit une puissance de 9.

Exercice 12. (Saint Cyr 2019)
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrez A semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donner la matrice P telle que $A = PTP^{-1}$.
3. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 13. (CCINP 2023)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée et $f : M \mapsto AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A^2 = A$ alors f est un projecteur.
3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

4. Exprimer un vecteur propre de f en fonction d'un vecteur propre de A .
5. Montrer que f et A et ont même spectre.

Exercice 14. (CCINP 2021)
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. telle que $M^4 = 4M^2$ et 2 et-2 sont valeurs propres de M.

1. On suppose M non inversible. Montrez $\mathrm{Sp}\,(M) = \{0, 2, -2\}$.
2. Montrez M diagonalisable.

Exercice 15. (IMT-CCMP 2021) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $\Psi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}\,(A)M + \mathrm{tr}\,(M)A$.

1. Ψ est-il diagonalisable ?
2. Donner le polynôme caractéristique et la trace de Ψ.

Exercice 16. (EIVP-ENTPE 2015)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $A^2 + A + I_n = 0$ alors n est pair et si $A^3 + A^2 + A = 0$ alors rg(A) est pair.

Exercice 17. (CCINP 24)

1. Montrer que si u est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors u^2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer par un contre exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\mathrm{Ker}\left(u^2 - \lambda^2 Id\right) = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id) \oplus \mathrm{Ker}(u + \lambda Id)$.
4. Montrer que si u est bijective, la réciproque de 1 est vraie.

Exercice 18. (Ecole Navale 2019) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On souhaite rechercher les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

1. La matrice est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Réduire A.
3. Que dire du spectre d'une solution M ? ?
4. Résoudre $M^2 = A$.

Exercice 19. Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(I_n + N) = 1$

Exercice 20. (Mines) Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables et qui commutent . Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonales.

Exercice 21. (Mines 2019) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -6 & 7 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p = af + bId_{\mathbb{R}^3}$ soit un projecteur sur une droite que l'on précisera.
3. La famille (A^2, A, I_3) est-elle libre ?

Exercice 22. (Centrale 2023) Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension n et u un endomorphisme de E

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)$ soit une base de E.
   Montrer que $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1})$ est libre.
   Que peut-on dire de $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1}, u^n)$?
2. On suppose désormais que u est diagonalisable et $(Id_E, u, u^2, \cdots, u^{n-1})$ libre.
   Montrer qu'il existe tel que : $x \in E$ tel que $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E soit libre.

Exercice 23. (Centrale PSI 2021)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle quetr $A = 0$ et $\mathrm{tr}\, A^2 \neq 0$. Montrez A diagonalisable.
2. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\mathrm{tr}\, A^k = 0$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$ et $\mathrm{tr}\, A^n \neq 0$. Montrez A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \cdots, n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

Exercice 24. (Mines-Ponts 24) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Justifier (sans le calculer) qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + dA = 0$.
2. Calculer d.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.
4. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 25. (Mines-Ponts 24) Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le commutant de A est défini par :
$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$.
Montrer que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ et chercher les cas d'égalité.

Exercice 26. (Mines-Ponts 24)

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer l'équivalence entre les deux propositions
   i) A est nilpotente
   ii) $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}\left(A^2\right) = \cdots = \operatorname{Tr}\left(A^n\right) = 0$
2. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente.

Exercice 27. (Centrale 24) Soit E l'ev des fonctions polynomiales. Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \longrightarrow e^{-x} \int_{-\infty}^{x} P(t)e^t \, \mathrm{d}t$.

1. Montrez L endomorphisme de E.
2. Trouvez les éléments propres de L.