PSI **Septembre 2020**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = a\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v ssi $a = 0$. Déterminer alors la dimension de E.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$. E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Soit $A = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $E = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$ et $F = \{f \in A / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que $A = E \oplus F$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 4. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2)) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans la matrice de f où $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leur base canonique.
3. Donner le noyau et l'image de f.

Exercice 5. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' - 2f \end{array}$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$. Conséquence ?
3. Justifier que f est surjective.
4. Qu'en déduit-on sur E ?

Exercice 6. Soit f l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}_6[X]$.
2. Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$.
3. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 7. Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 8. $E = \mathbb{R}[X]$ $\varphi : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ Montrer que φ est un endomorphisme de E. Soit $P \in E$, donner $deg(\varphi(P))$. En déduire $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et φ_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n(P) = \varphi(P)$. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\varphi_n)$ et en déduire que φ est surjective.

Exercice 9. Montrer que l'application $T : f \longmapsto T(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une application linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, injective et non surjective.

Exercice 10. $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}$.
On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ défini par :

$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est un isomorphisme.
   (b) En déduire que $\mathcal{R}$ est de dimension finie et en préciser sa dimension.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{2^n},\ b_n = \dfrac{n}{2^n},\ c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
   (a) Montrer que $B = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de $\mathcal{R}$.
   (b) En déduire le terme général u_n d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{R}$, en fonction de (u_0, u_1, u_2).
4. (a) Ecrire la matrice de φ dans la base B de $\mathcal{R}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Comment retrouve-t-on rapidement par cette matrice que φ est un isomorphisme ?

Exercice 11. Les Polynômes de Lagrange (*à retenir*) On considère $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \cdots, a_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$$

   est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!], L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(a_i) = 1$.
3. Donner l'expression des polynômes $L_i, 0 \leq i \leq n$.
4. A partir de : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!], L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(a_i) = 1$, redémontrer que $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.
5. Montrer que $W = \{f \in C^0(\mathbb{R}) / \forall i \in [\![0,n]\!], f(a_i) = 0\}$ est un s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$, dont un supplémentaire est $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12.

1. Ecrire la table de multiplication de 17.
2. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

3. Faire le calcul direct de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\det((|i-j|)_{1\leq i,j\leq n})$.
2. Calculer $\det((\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$.
3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = 1+x^2, \forall i \in [\![1,n-1]\!] a_{i,i+1} = x, \forall i \in [\![2,n]\!], a_{i-1,i} = x$ et tous les autres coefficients sont nuls.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0, AX = \lambda X$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
2. En déduire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0, AX = \lambda X$.

Exercice 15. Soit $(a,b,c) \in K^3$. A quelle condition les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{K}^3$?