Savoirs-faire du Chapitre 2 : Autour des fonctions

Applications

— Maîtriser le vocabulaire (surjectif, injectif, bijectif, composée et combinaison linéaire, ...).
— Connaître les définitions et savoir les manipuler pour démontrer des résultats.
— Créer des exemples simples, à l'aide de diagrammes.
— Déterminer des images directes et des images réciproques.

Exercice n° 1

1. Montrer que si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont injectives alors $g \circ f$ l'est également.
2. Donner un exemple d'une application surjective mais pas injective.
3. Déterminer $\sin([0;1])$ et $\cos^{-1}(\mathbb{Z})$.

Généralités sur les fonctions

— Déterminer le domaine de définition d'une fonction définie par une expression algébrique.
— Déduire la courbe de $g(x)$ à partir de celle de $f(x)$ lorsque le lien entre les expressions algébriques est simple.
— Appliquer les définitions pour étudier les variations.
— Utiliser le théorème de la bijection.
— Décider si une fonction est paire, impaire, périodique ou aucun des trois.
— Faire l'étude complète d'une fonction.

Exercice n° 2

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(\sin x)$.
2. À main levée, dessiner l'allure de $y = \cos(2x) - 1$.
3. Etudier les variations de $x \mapsto x^2$; de $x \mapsto \sqrt{x}$.
4. Justifier que $f(x) = x - \ln x$ réalise une bijection de $]0;1]$ vers un ensemble que l'on précisera.
5. Etudier la parité de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, puis en faire l'étude.

Dérivation des fonctions

— Utiliser la définition du nombre dérivé.
— Trouver une équation de tangente, réciproquement lire le nombre dérivé.
— Calculer une dérivée à l'aide des formules sur les opérations.
— Etudier des variations, trouver des extrema.

Exercice n° 3

1. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. Retrouver les formules vues en terminale : $(\ln u)'$, $(\mathrm{e}^u)'$, $(\sqrt{u})'$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(ax + b)$.
   (On précisera les conditions pour u)
3. Trouver toutes les tangentes de $y = \ln x$ qui passent par le point $A(0;1)$.
4. Sans s'occuper de la dérivabilité, dériver $f(x) = \ln(x^2 \sin x + \sqrt{x})$.
5. Montrer que $f(x) = \frac{3+x}{1+x^2}$ admet un maximum que l'on précisera.

Fonctions de référence

— Dessiner l'allure de chacune des fonctions de référence vues : trigonométriques (et réciproques), exp, ln.
— Utiliser des formules liées à ces fonctions : formules de trigonométrie, dérivées des fonctions trigonométriques réciproques, règles de calcul avec exp et ln.

Exercice n° 4

1. Prouver que, lorque les expressions sont bien définies, on a $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
   En déduire une formule pour $\tan 2a$.
2. Calculer (à la main) : $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4}))$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$.
3. Prouver que, lorsque les expressions sont bien définies, on a : $\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.
4. Dériver $t \mapsto \arctan(t^2)$.
5. Soit $a > 0$. Faire l'étude complète de $x \mapsto a^x$.
6. Soit $b \in \mathbb{R}$. Faire l'étude complète de $x \mapsto x^b$.
