

Séance Créneau Etoile
1^{er} Octobre 2025
Compléments d'algèbre linéaire

Veuillez préparer cette feuille d'exercices pour le jour J.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan et trouver un supplémentaire.
2. Soit $\Delta : E \rightarrow E, P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
 - (a) Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ et que $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ est stable par Δ .
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$.
 - (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(\mathbb{K}_{n+1}[X]) = \mathbb{K}_n[X]$.
 - (d) En déduire que Δ est surjective.
3. Montrer :

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists! P \in \mathbb{K}[X], \text{ tq } \Delta(P) = Q \text{ et } P(1) = 0$$

Exercice 2. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \mapsto \det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient P un polynôme de degré n et $(a_0, \dots, a_n)$ des réels deux à deux distincts.

1. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, P(x+a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} a^k$.
2. En déduire que $\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(X + a_i) = \sum_{k=0}^n \frac{a_i^k}{k!} P^{(k)}(X)$.
3. Montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 4. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application qui à chaque matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\text{tr}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(AM)$. Il s'agit de montrer la bijectivité d'une application à déterminer
3. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$.
 - (a) Pour $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.
 - (b) En déduire que si i et j sont deux éléments distincts de $[1..n]$, alors : $f(E_{ij}) = 0$ et $f(E_{ii}) = f(E_{jj})$.
 - (c) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $f = \lambda \text{tr}$.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB = 0\}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. *Indication : utiliser la caractérisation du rang d'une matrice par une matrice par bloc simple*