PSI MATHEMATIQUES
Analyse
Septembre 2023

Feuille d'exercices
Séries Numériques

1 Des classiques

Exercice 1. Nature de
1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, 2) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$, 3) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, 4) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n-1)!}$,
5) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{Arccos}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$, 6) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, 7) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n-\ln n}$, 8) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,
9) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1})$, 10) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin(\frac{\pi n^2}{n+1})$, 11) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.(*Simplifier* $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)+\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$)

Exercice 2. Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence
1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{3^n}$, 2) $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$, 3) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$, 4) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, 5) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(\cos(\frac{a}{2^n})$ où $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, 6) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{th}(\frac{a}{2^n})}{2^n}$ où $a > 0$.

Exercice 3. (CCINP) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $ln(x) = x - n$ a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n. Étudier la nature de $\sum x_n^\alpha$.

Exercice 4. (CCINP) Montrer que la série de terme général $\ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est convergente mais pas absolument.

Exercice 5. (CCINP) Soient, pour $\alpha > 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Etudier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ suivant les valeurs de α.

Exercice 6. : (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $H(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que

$$e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

Exercice 7.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et donner sa somme.
2. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 8. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ converge et déterminer une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près.

Exercice 9. (CCINP 2018) Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge.

2 Plus difficile

Exercice 10. (CCINP)

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions $0 \leq x_n < y_n$.
2. Etudier la monotonie des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$. En déduire qu'elles convergent vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
4. Trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln(n)$.
6. Nature de $\sum u_n$ et $\sum n^\alpha y_n$

Exercice 11. (Mines-Ponts)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$

Justifier l'existence des u_n et étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 12. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-x} \leq x$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.
3. Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n u_n$
4. Nature de $\sum u_n^2$

Exercice 13. (Mines Télécom 2019)
Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(2 - 3^{\frac{1}{k}}\right)$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
2. En considérant $\ln(u_n)$, donner la limite de $\ln(u_n)$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{\ln(3)}}$. *(Indication :Considérer $v_n = n^{\ln(3)} u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$)*

Exercice 14. Maths 1 Centrale (30 min sans préparation)

On pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. On se place dans le cas $\alpha > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Déterminer la limite de $(u_n)_n$ selon la valeur de α.
3. On suppose $\alpha > 1$ et on pose $v_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de v_n et Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon la valeur de α .