classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES — **Feuille d'Exercices** $n°10$
Janvier 2026 — **Séries Entières**

Exercice 1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{(2n)!}z^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\binom{2n}{n}}{n^n}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1})x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n}}{n^2+1}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\ln n x^n,\quad \sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}}-1)x^n$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum \mathrm{ch}\,(n)x^{3n+1}$.

Exercice 3. (CCINP 24 sans préparation)
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum(n^2+n+1)x^n$. *On écrira X^2+X+1 dans la base $(1,X,X(X-1))$*

Exercice 4. On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{sh}\,(k)$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum S_nx^n$.

Exercice 5. Soit $(a_n)_n$ une suite périodique.

1. Montrer qu'elle est bornée.
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}a_nx^n$?

Exercice 6. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(1+2i)^n}$

Exercice 7. On définit f par $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$

1. Donner son ensemble de définition D.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que f est C^∞ sur $]-1,1[$. Préciser $f'(x)$.
4. En déduire $f(x)$ pour $x\in]-1,1[$.
5. En déduire les valeurs de $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 8. On définit S par $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$

1. Donner son ensemble de définition D.
2. Montrer que S est continue sur D.
3. Montrer que S est C^∞ sur $]-1,1[$.
4. Montrer que S est dérivable en -1 et déterminer $S'(-1)$.

Exercice 9. Soit $a>0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1},\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 10.

1. Montrer la convergence de $\displaystyle I=\int_0^1\frac{\ln x\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire I sous forme d'une série numérique.

Exercice 11. : Etablir un problème de Cauchy vérifié par $f:x\longmapsto\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire le DSE de f.

Exercice 12. Déterminer les solutions développables en série entière solutions des équations différentielles suivantes :

1. $x^2y''-x(2x^2-1)y'-(2x^2+1)y=0$.
2. $x^2y''+4xy'+2y=e^x$.

Exercice 13. On donne $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{a_n}{n!} \leq 1$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ est au moins définie sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
4. Exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

Exercice 14. DSE de

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 15)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2 + x - x^2}$
5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sin(\alpha \mathrm{Arcsin} x)$

Exercice 15. (Mines 2018)Soit pour $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}\,(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ puis étudier la convergence aux bornes du domaine.

Exercice 16. (Mines 2018)Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{x + e^t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est développable en série entière et calculer $f^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

Exercice 17. (Centrale 2024) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon infini. On note f sa somme

1. Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p$$
2. On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :
   $$\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leqslant \frac{M}{r^p}$$
   (b) Montrer que $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire que f est constante.
3. On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leqslant \alpha |z|^q + \beta$$
Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 18. (Mines 2022) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$? sans point fixe et p_n la probabilité qu'une permutation de $[\![1, n]\!]$? choisie au hasard soit sans point fixe. Par convention, $p_0 = 1$.

1. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n-k)!} = 1$
2. En déduire que, pour $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
3. Montrer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{e}$