PSI **Janvier 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Somme de sous-espaces vectoriels- Sous espaces supplémentaires.
Décomposition d'un espace vectoriel en somme directe

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les sous-espaces propres de A sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une matrice diagonale semblable à A.

Exercice 2. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!], F_i = \{P \in E / \forall j \in [\![0, n]\!] \subset \{i\}, P(j) = 0\}$. Montrer que $\overset{n}{\underset{i=0}{\oplus}} F_i = E$

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id_E$. On note $f_1 = Id_E + f + f^2, f_2 = Id_E + jf + j^2 f^2, f_3 = Id_E + j^2 f + jf^2$.

1. Factoriser $X^3 - 1$ par $X - 1$.
2. En déduire que $\operatorname{Im}(f_1) \subset \operatorname{Ker}(f - Id_E)$.
3. Procéder de même pour obtenir une inclusion utilisant $\operatorname{Im}(f_2)$ et une utilisant $\operatorname{Im}(f_3)$.
4. Montrer que $E = \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} \operatorname{Im}(f_i)$.

Exercice 4. Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

Soient les sev $F = \{y \in E, \forall x \in [0, 1], y'' + xy = 0\}$, $G = \{y \in E, \forall x \in [0, 1], y'' - xy = 0\}$ et H l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$

1. Montrer que $F \cap H$ et $G \cap H$ sont réduits à $\{0\}$.
2. On considère $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tels que $f + g + h = 0$.
   (a) Vérifier que $h''(0) = 0$.
   (b) Montrer que $f \in H$ et $g \in H$.
3. Montrer que $F + G + H$ est une somme directe.

Exercice 5. On donne une famille $(f_1, \cdots, f_n)$ d'endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^{n} f_k = Id_E$ et $i \neq j \Longrightarrow f_i \circ f_j = 0_E$. Montrer que, pour tout k, f_k est un projecteur et que E est somme directe de leurs images.

Exercice 6. Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ vérifie $A^2 = 0$ si et seulement si il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit semblable à $N = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$